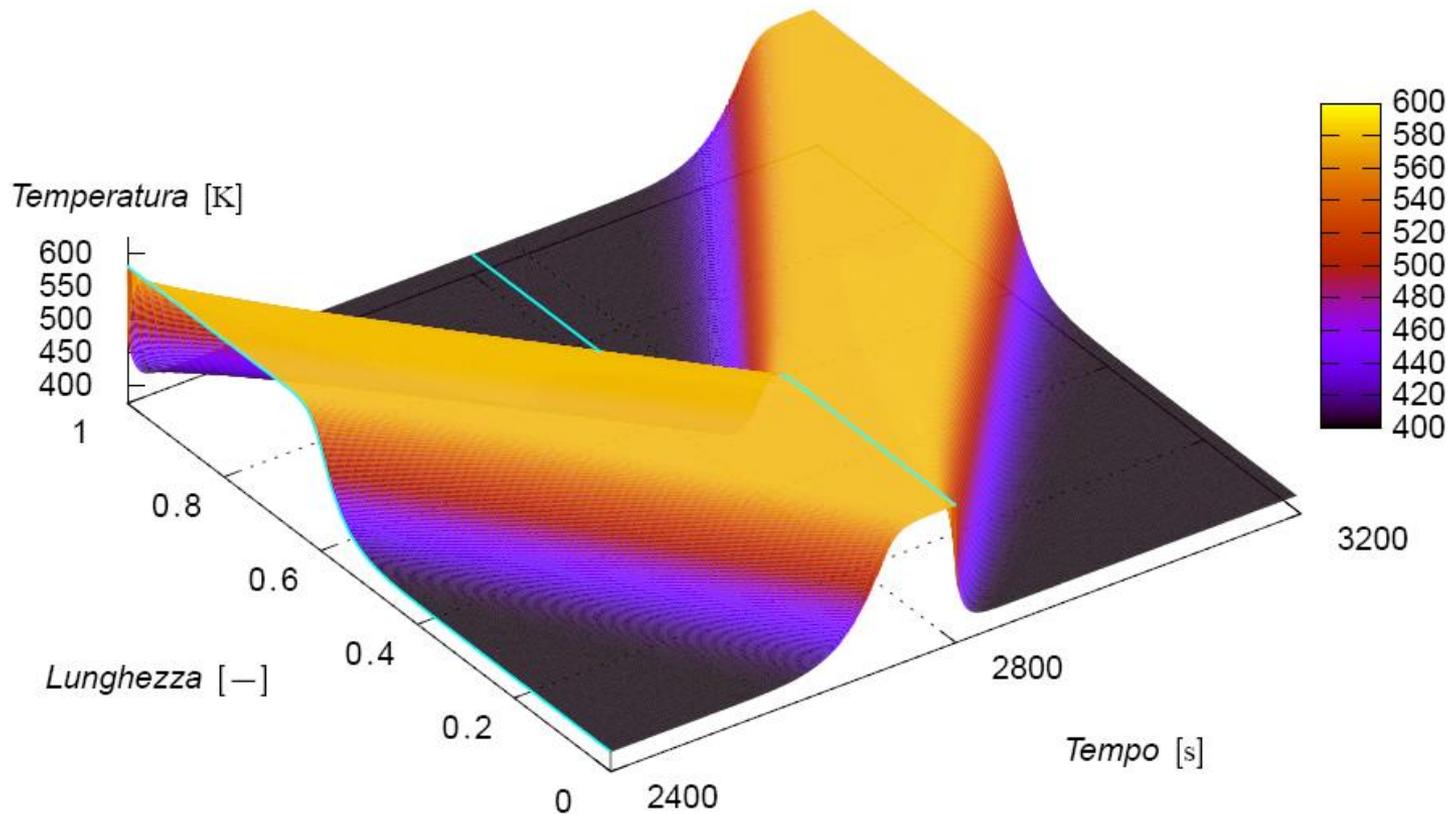


# Comportamento dinamico dei sistemi



# Dinamica lineare e non lineare dei sistemi

Per conoscere il comportamento dinamico di un sistema occorre integrare le equazioni differenziali che descrivono la sua evoluzione nel tempo.

La pratica totalità delle equazioni differenziali, che descrivono la dinamica di un processo chimico/industriale, è **non lineare**.

Sfortunatamente, **non esiste** una **teoria matematica** per la **soluzione analitica** di **ODE non lineari**.

Solo le **ODE lineari** dispongono di **soluzioni analitiche** in **forma chiusa**.

**N.B.:** *in mathematics, an equation or system of equations is said to have a **closed-form solution** if, and only if, at least one solution can be expressed analytically in terms of a **bounded number** of certain “well-known” **functions**. Typically, these well-known functions are defined to be elementary functions; so infinite series, limits, and continued fractions are not permitted.*

<http://dictionary.babylon.com/analytic%20solution>



# Dinamica lineare e non lineare dei sistemi

Per effettuare un'analisi dinamica di un sistema non lineare è possibile:

1. calcolare la **soluzione numerica** del sistema non lineare;
2. trasformare il sistema non lineare in un sistema lineare tramite un'opportuna **trasformazione di variabili**;
3. **sviluppare** un modello lineare del sistema non lineare **in un intorno** della sua condizione operativa.

**L'alternativa 1**, un tempo pesante, onerosa e quindi anche temuta e possibilmente evitata, oggi è viceversa fattibile e accessibile sia come sforzo implementativo che come peso calcolistico.

Esistono ottimi metodi matematici, algoritmi e routine per la soluzione di sistemi:

- ODE (ordinary differential equations) **stiff** e **non stiff**
- DAE (differential and algebraic equations)

**N.B.:** un sistema DAE è sempre stiff



# Dinamica lineare e non lineare dei sistemi

**L'alternativa 2** è raramente utilizzabile e quindi non è di interesse.

**L'alternativa 3** è in linea di principio sempre implementabile anche se evidentemente introduce uno scollamento (*i.e.* approssimazione) tra il sistema originale non lineare e quello linearizzato.

È opportuno sottolineare che in passato tutta la teoria della progettazione di sistemi di controllo si basava su sistemi lineari e che ben pochi progressi sono stati compiuti nello sviluppo di una teoria del controllo per sistemi non lineari.

Cenni a sistemi non lineari ed alla loro risoluzione/integrazione:

- Algebrici
- Differenziali
- Algebrico differenziali



# Linearizzazione di equazioni differenziali

Un sistema differenziale non lineare può essere approssimato da un sistema lineare tramite l'operazione di **linearizzazione**.

Iniziamo a considerare un'equazione differenziale in una variabile:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

espandendo in serie di Taylor la  $f(y)$  intorno al punto  $y_0$  si ottiene:

$$f(y) = f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0} (y - y_0) + \left. \frac{d^2 f}{dy^2} \right|_{y_0} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{d^n f}{dy^n} \right|_{y_0} \frac{(y - y_0)^n}{n!}$$

trascurando i termini di ordine superiore al primo si ottiene la seguente

**approssimazione:**

$$f(y) \approx f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0} (y - y_0)$$

**N.B.:** l'approssimazione lineare è soddisfacente soltanto quando  $y$  è prossimo a  $y_0$ .

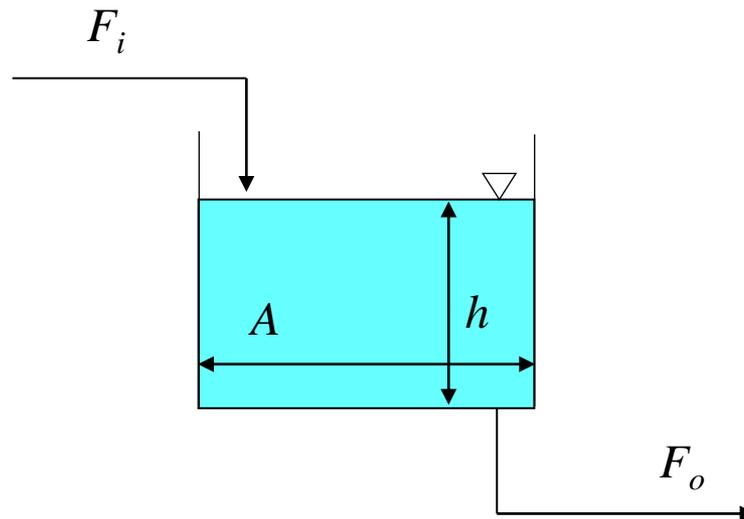


# Linearizzazione di equazioni differenziali

Conseguentemente l'equazione differenziale originale  $y = f(y)$  viene approssimata dalla linearizzazione:

$$\frac{dy}{dt} = f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0} (y - y_0)$$

Si consideri a titolo di esempio l'equazione differenziale descrivente il bilancio massivo complessivo di un serbatoio:



# Linearizzazione di equazioni differenziali

Abbiamo:  $A \frac{dh}{dt} = F_i - F_o$

La portata uscente è funzione del battente di liquido secondo la dipendenza funzionale:

$$F_o = \xi \sqrt{h}$$

L'equazione differenziale **non lineare** del sistema risulta quindi pari a:

$$A \frac{dh}{dt} + \xi \sqrt{h} = F_i$$

che vede **un unico termine non lineare** in:  $\xi \sqrt{h}$

Espandendo in serie di Taylor l'unico termine non lineare e troncandolo al primo termine si ha:

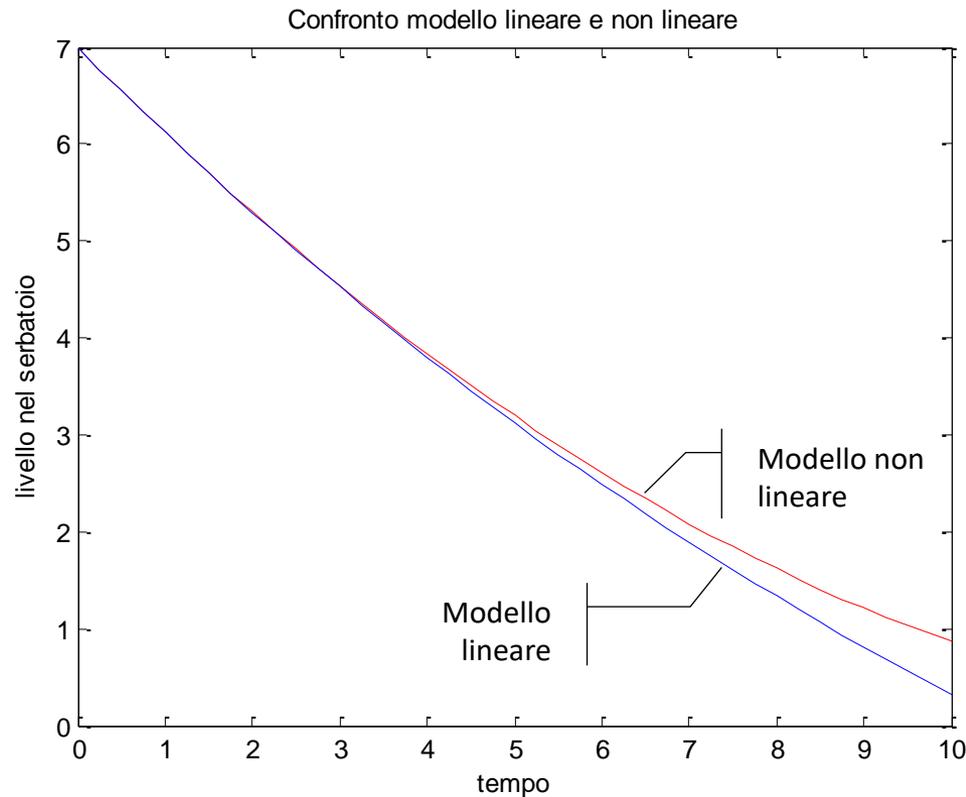
$$\xi \sqrt{h} \approx \xi \sqrt{h_0} + \frac{\xi}{2\sqrt{h_0}} (h - h_0)$$

ove  $h_0$  è un opportuno punto scelto dall'utente rispetto cui avviene la linearizzazione.

# Linearizzazione di equazioni differenziali

L'equazione differenziale **linearizzata** rispetto al punto  $h_0$  risulta essere:

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{\xi}{2\sqrt{h_0}} h = F_i - \frac{\xi}{2} \sqrt{h_0}$$



$$h_0 = 7 \text{ e } F_{in} = 0$$



# Linearizzazione di equazioni differenziali

Si noti come anche il modello linearizzato **non** produca una risposta lineare.

Si noti altresì come in prossimità di  $h_0$  (cioè in prossimità del punto di linearizzazione della variabile dipendente  $h$ ) i due modelli (lineare e non lineare) siano praticamente identici.

Al contrario più il modello si discosta da  $h_0$  con il passare del tempo più i due modelli risultano distinti.

Il modello linearizzato non è adeguato a descrivere il sistema reale (non lineare) per tempi sufficientemente elevati corrispondenti all'allontanamento del sistema dal punto originale di linearizzazione.



# Linearizzazione di equazioni differenziali

Nel caso di modelli con più variabili l'approssimazione di un sistema dinamico non lineare segue una strada analoga a quella di un sistema con una sola variabile.

A titolo d'esempio si consideri il sistema non lineare costituito da 2 ODE:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$$



# Linearizzazione di equazioni differenziali

Si procede con lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni non lineari:

$$\left\{ \begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= f_1(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_2 - y_{2,0}) + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} \frac{(y_1 - y_{1,0})^2}{2!} + \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_2^2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} \frac{(y_2 - y_{2,0})^2}{2!} + \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0})(y_2 - y_{2,0}) + \dots \\ f_2(y_1, y_2) &= f_2(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_2 - y_{2,0}) + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1^2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} \frac{(y_1 - y_{1,0})^2}{2!} + \left. \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_2^2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} \frac{(y_2 - y_{2,0})^2}{2!} + \left. \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1 \partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0})(y_2 - y_{2,0}) + \dots \end{aligned} \right.$$

# Linearizzazione di equazioni differenziali

Trascurando i termini dello sviluppo in serie superiori al primo si ottiene l'approssimazione lineare:

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2) \approx f_1(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_2 - y_{2,0}) \\ f_2(y_1, y_2) \approx f_2(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_2 - y_{2,0}) \end{cases}$$

Il sistema dinamico linearizzato risulta essere:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_2 - y_{2,0}) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right|_{y_{1,0}, y_{2,0}} (y_2 - y_{2,0}) \end{cases}$$



# Linearizzazione di equazioni differenziali

Anche in questo caso valgono le seguenti considerazioni:

- l'approssimazione lineare peggiora man mano che il punto  $(y_1, y_2)$  si allontana dal punto iniziale  $(y_{1,0}, y_{2,0})$  rispetto cui il sistema è stato linearizzato;
- la bontà dell'approssimazione lineare dipende dal punto  $(y_{1,0}, y_{2,0})$  intorno al quale è stato svolto lo sviluppo in serie di Taylor.

**N.B.:** per semplicità sia l'esempio basato su di una variabile di integrazione sia quello basato su due variabili hanno visto la linearizzazione delle equazioni rispetto alle variabili di stato  $y_i$ . In realtà **la linearizzazione può essere effettuata anche nel caso di presenza di variabili di *input* quali quelle manipolate o i disturbi.**



# Linearizzazione di equazioni differenziali

Per maggior chiarezza, si consideri il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, m_1, m_2, d_1) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, m_1, m_2, d_2) \end{cases}$$

Il sistema linearizzato risulta essere:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_{1,0}, y_{2,0}, m_{1,0}, m_{2,0}, d_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right|_0 (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right|_0 (y_2 - y_{2,0}) + \\ \quad + \left. \frac{\partial f_1}{\partial m_1} \right|_0 (m_1 - m_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial m_2} \right|_0 (m_2 - m_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial d_1} \right|_0 (d_1 - d_{1,0}) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_{1,0}, y_{2,0}, m_{1,0}, m_{2,0}, d_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right|_0 (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right|_0 (y_2 - y_{2,0}) + \\ \quad + \left. \frac{\partial f_2}{\partial m_1} \right|_0 (m_1 - m_{1,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial m_2} \right|_0 (m_2 - m_{2,0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial d_1} \right|_0 (d_2 - d_{2,0}) \end{cases}$$



# Linearizzazione di un CSTR non isoterma

Si considerino le equazioni costitutive di un CSTR non isoterma (reazione esotermica) caratterizzato da un volume di reazione  $V$  costante nel tempo:

$$\begin{cases} \frac{dc_A}{dt} = \frac{1}{\tau} (c_{A_i} - c_A) - k_0 e^{-E/RT} c_A \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_i - T) + J k_0 e^{-E/RT} c_A - \frac{UA_{exc}}{\rho c_p V} (T - T_c) \end{cases}$$

dove:  $J = \frac{-\Delta H_r}{\rho c_p}; \tau = \frac{V}{F_i}$

$A_{exc}$  è l'area di scambio del CSTR incamiciato e  $T_c$  è la temperatura del refrigerante che scorre nella camicia.

L'unico termine **non lineare** di tutto il modello è quello cinetico:  $e^{-E/RT} c_A$



# Linearizzazione di un CSTR non isoterma

Linearizzando tale termine rispetto ad un punto operativo  $(T_0, c_{A,0})$  si ottiene:

$$e^{-E/RT} c_A \approx e^{-E/RT_0} c_{A,0} + \left. \frac{\partial (e^{-E/RT} c_A)}{\partial T} \right|_{T_0, c_{A,0}} (T - T_0) + e^{-E/RT_0} c_{A,0} + \left. \frac{\partial (e^{-E/RT} c_A)}{\partial c_A} \right|_{T_0, c_{A,0}} (c_A - c_{A,0}) =$$

$$= e^{-E/RT_0} c_{A,0} + \left( \frac{E}{RT_0^2} e^{-E/RT_0} c_{A,0} \right) (T - T_0) + e^{-E/RT_0} (c_A - c_{A,0})$$

Il sistema linearizzato risulta quindi:

$$\begin{cases} \frac{dc_A}{dt} = \frac{1}{\tau} (c_{A_i} - c_A) - k_0 \left( e^{-E/RT_0} c_{A,0} + \left( \frac{E}{RT_0^2} e^{-E/RT_0} c_{A,0} \right) (T - T_0) + e^{-E/RT_0} (c_A - c_{A,0}) \right) \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_i - T) + Jk_0 \left( e^{-E/RT_0} c_{A,0} + \left( \frac{E}{RT_0^2} e^{-E/RT_0} c_{A,0} \right) (T - T_0) + e^{-E/RT_0} (c_A - c_{A,0}) \right) - \frac{UA_{exc}}{\rho c_p V} (T - T_c) \end{cases}$$



# Sistemi del primo ordine



# Sistemi del primo ordine

Un **sistema** del **primo ordine** è caratterizzato da un' **equazione differenziale del primo ordine** descrivente la dinamica della variabile di output  $y(t)$ .

Nel caso di un sistema lineare o linearizzato si ha l'equazione differenziale:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b f(t)$$

dove  $f(t)$  è l'**input al sistema** ed è anche definito funzione forzante o più brevemente **forzante del sistema**.

Se  $a_0 \neq 0$  allora è possibile scrivere:  $\frac{a_1}{a_0} \frac{dy}{dt} + y = \frac{b}{a_0} f(t)$

che diviene:  $\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p f(t)$

avendo posto:  $\tau_p = \frac{a_1}{a_0}$        $K_p = \frac{b}{a_0}$



# Sistemi del primo ordine

Riprendendo l'equazione del primo ordine:

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p f(t)$$

Si hanno le seguenti definizioni:

- $\tau_p$  **costante di tempo** del processo;
- $K_p$  **guadagno statico** (o semplicemente **guadagno**) del processo.

Se viceversa  $a_0 = 0$  allora:  $\frac{dy}{dt} = \frac{b}{a_1} f(t) = K'_p f(t)$

ed il sistema è detto **puramente capacitivo** (o integratore puro).



# Processi del primo ordine

Processi del primo ordine sono caratterizzati dal fatto che:

- sono in grado di **immagazzinare** materia, energia e/o quantità di moto;
- presentano una **resistenza** associata al flusso di massa, energia o quantità di moto nel raggiungimento della capacità di *stoccaggio*.

Conseguentemente la risposta dinamica di **serbatoi** che hanno la **capacità** di **stoccare liquidi o gas** può essere modellata da sistemi del **primo ordine**.

La **resistenza** di tali sistemi è legata alle: **pompe**, **valvole**, **stramazzi** o **condotti** associati alle **correnti liquide o gassose entranti o uscenti**.

Analogamente, la risposta in termini di temperatura di **sistemi solidi, liquidi o gassosi** in grado di **stoccare energia** (*i.e.* **capacità termica**,  $c_p$ ) viene modellata da sistemi del **primo ordine**.

Per questi sistemi la **resistenza** allo scambio di energia è rappresentata dal **trasferimento di calore** attraverso pareti, liquidi o gas.



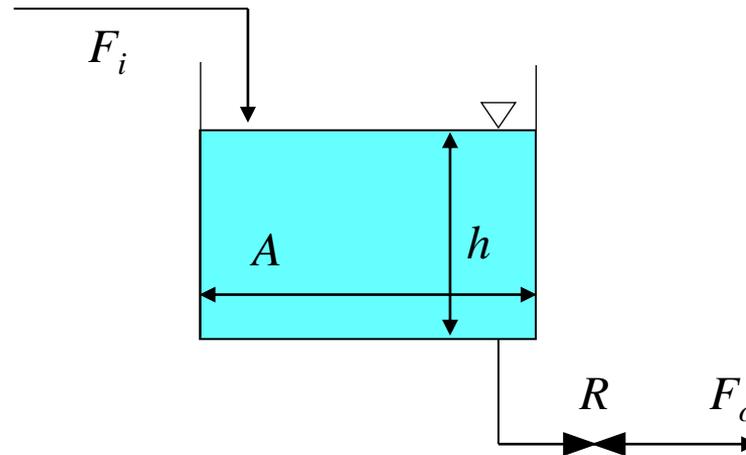
# Processi del primo ordine

Un **processo** che abbia la **capacità di immagazzinare massa o energia** ed operi da **polmone** tra le **correnti entranti ed uscenti** è modellabile come un sistema del **primo ordine**.



# Esempio: processo primo ordine capacitivo

Si consideri il seguente serbatoio:



La portata volumetrica entrante è  $F_i$ , mentre quella uscente è  $F_o$ . La **resistenza**  $R$  relativa alla portata uscente descrive una **resistenza al flusso** e fisicamente è costituita da un **condotto** o da una **valvola** o da uno **stramazzo**.

Assumiamo che la portata uscente  $F_o$  dipenda linearmente dal battente idrostatico ( $h$ ) attraverso la resistenza  $R$ :

$$F_o = \frac{h}{R} = \frac{\text{agevolazione al flusso}}{\text{resistenza al flusso}}$$

# Esempio: processo primo ordine capacitivo

Il bilancio massivo totale è pari a:

$$A \frac{dh}{dt} = F_i - F_o = F_i - \frac{h}{R}$$

ovvero:

$$AR \frac{dh}{dt} + h = RF_i$$

La costante di tempo del sistema risulta pari a:  $\tau_p = AR$

Il guadagno (statico) del sistema è pari a:  $K_p = R$

**N.B.:** la sezione  $A$  del serbatoio è una misura della capacità del sistema di stoccare (immagazzinare) massa. Più  $A$  è grande, maggiore è la capacità di stoccaggio del serbatoio.

**N.B.:** dato che  $\tau_p = AR$  è possibile affermare che:

$$\text{costante di tempo} = (\text{capacità di stoccaggio}) \times (\text{resistenza al flusso})$$



# Esempio: sistema puramente capacitivo

Si consideri nuovamente lo stesso serbatoio caratterizzato però da una portata uscente  $F_o$  determinata da una **pompa a portata costante** (quindi  $F_o$  non dipende dal battente di liquido nel serbatoio).

Il modello dinamico del serbatoio risulta essere:  $A \frac{dh}{dt} = F_i - F_o$

In condizioni stazionarie:  $0 = F_{i,s} - F_o$

Rammentando che un sistema puramente capacitivo è caratterizzato dalla seguente equazione:

$$\frac{dy}{dt} = K'_p f(t)$$

se si impone alla forzante del sistema  $f(t)$  un cambiamento a gradino:

$$f(t) = 1 \quad \text{per } t > 0$$

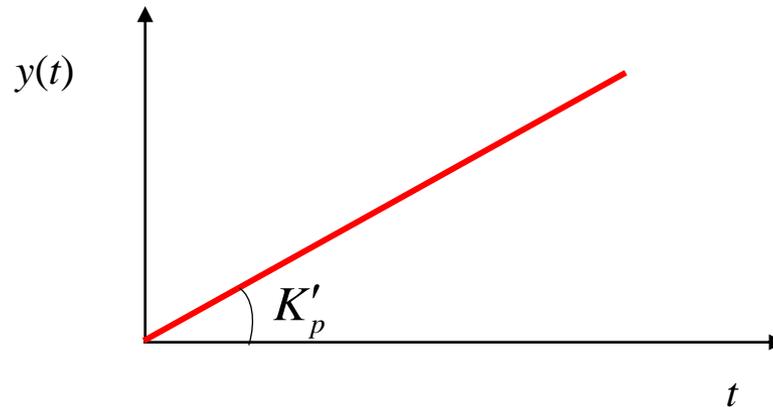


# Esempio: sistema puramente capacitivo

si ottiene:  $y(t) = K'_p t$

È possibile notare che:  $y(t) \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow \infty$

Questa è la tipica risposta di un sistema **puramente capacitivo**. Di qui la motivazione per chiamare i sistemi puramente capacitivi con il termine di **integratori puri**.



**N.B.:** un sistema puramente capacitivo dà grossi problemi a livello di controllo in quanto non è in grado di auto-bilanciarsi.

# Esempio: sistema puramente capacitivo

**N.B.:** con riferimento specifico al serbatoio puramente capacitivo, caratterizzato dalla pompa di estrazione a portata variabile, una volta regolata la portata liquida uscente dal serbatoio ( $F_o$ ) e postala pari a quella in ingresso ( $F_i$ ), una minima variazione della portata in ingresso condurrà alternativamente il serbatoio ad una condizione di flooding (tracimazione,  $F_i > F_o$ ) o di svuotamento completo ( $F_i < F_o$ ).

Questa caratteristica è anche nota con il termine di “sistema non in grado di autoregolarsi”.

Tipiche apparecchiature chimiche contraddistinte da una pura **azione integrale** sono: **serbatoi** di liquidi, **recipienti** di gas, sistemi di **stoccaggio** materie prime, prodotti finali, intermedi di processo.



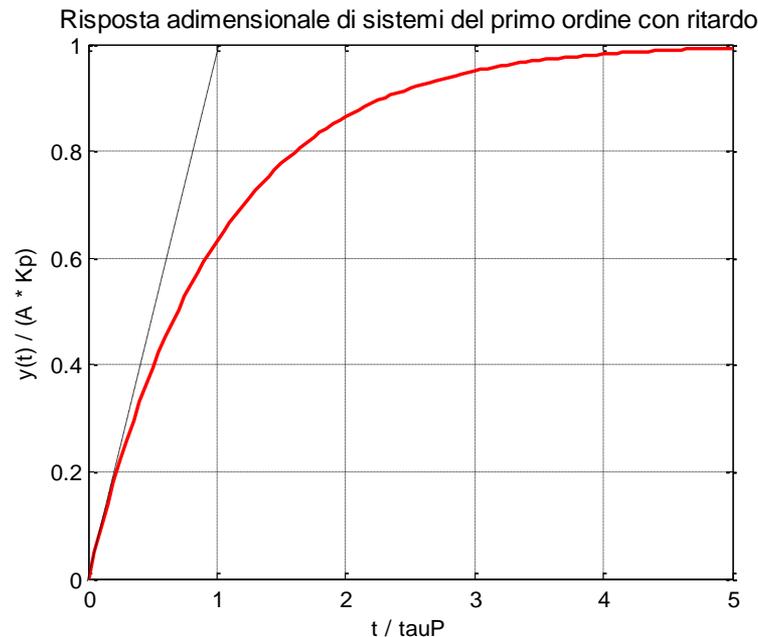
# Dinamica di un sistema del I ordine con ritardo

La dinamica di sistemi del primo ordine con ritardo è rappresentata da:

$$y(t) = K_p \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)$$

Se la forzante del sistema  $f(t)$  cambia secondo un gradino di ampiezza  $A$  allora la risposta del sistema è:

$$y(t) = A K_p \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right)$$



# Dinamica di un sistema del I ordine con ritardo

Si noti come il diagramma di risposta del sistema del primo ordine con ritardo sia indipendente dai valori di  $A$ ,  $K_p$  e  $\tau_p$  e sia quindi caratteristico di un generico processo del primo ordine.

Un **sistema del primo ordine con ritardo** è caratterizzato dalle seguenti peculiarità:

- è **autoregolante**;
- contrariamente ad un sistema puramente capacitivo, **raggiunge un nuovo stato stazionario**;
- nel caso del serbatoio, se la portata entrante  $F_i$  aumenta allora cresce il livello del liquido ma con esso il battente idrostatico che incrementa la portata uscente  $F_o$  e regola nuovamente il livello del serbatoio (se fisicamente resta nei limiti costruttivi). Complessivamente il serbatoio raggiunge un nuovo stazionario (ove  $F_i = F_o$ );



# Dinamica di un sistema del I ordine con ritardo

- la pendenza della risposta adimensionalizzata del sistema al tempo iniziale (*i.e.*  $t = 0$ ) è pari ad 1:

$$\frac{d\left[ y(t)/AK_p \right]}{d\left( t/\tau_p \right)} = e^{-t/\tau_p} \Big|_{t=0} = 1$$

- il punto precedente mette in evidenza che **più la costante di tempo  $\tau_p$  è piccola più ripida è la risposta del sistema**;
- il sistema raggiunge il 63% (*i.e.*  $1 - 1/e$ ) del valore finale di fine transitorio dopo un tempo pari alla costante di tempo  $\tau_p$ ;
- dopo  $3\tau_p$  e  $4\tau_p$  il sistema raggiunge rispettivamente il 95% e 98% del valore finale di fine transitorio. Ciò vuol dire che dopo tre/quattro costanti di tempo il sistema ha praticamente raggiunto (95%-98%) il nuovo stazionario;
- la risposta finale del sistema vale  $K_p$  per un cambiamento a gradino unitario della variabile di input mentre vale  $AK_p$  per un cambiamento a gradino di ampiezza  $A$ ;



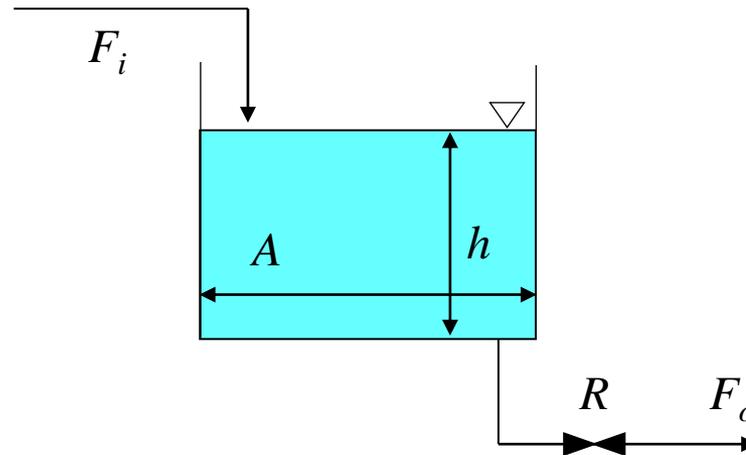
# Dinamica di un sistema del I ordine con ritardo

- conseguentemente per un generico cambiamento a gradino della variabile di input si ha:  $\Delta(\text{output}) = K_p \Delta(\text{input})$
- per questo motivo il parametro  $K_p$  è detto **guadagno statico** del sistema;
- sistemi altamente responsivi sono caratterizzati da  $K_p$  elevati;
- sistemi poco responsivi sono caratterizzati da  $K_p$  ridotti.



# Esempio: processo primo ordine capacitivo

Consideriamo nuovamente il serbatoio descritto da un sistema del primo ordine capacitivo:



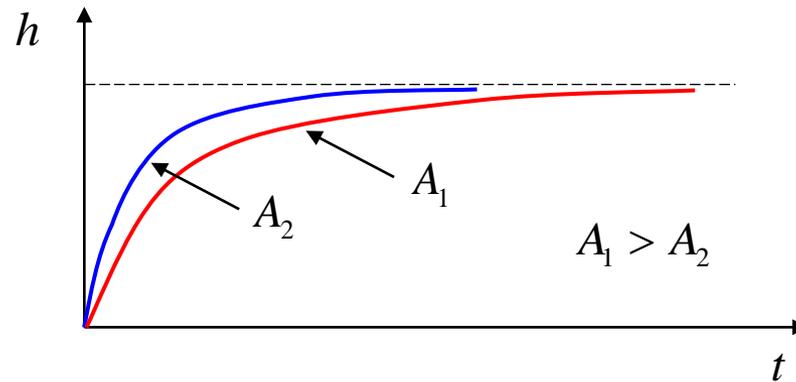
Assumendo costante la resistenza  $R$  e variabile l'area  $A$  del serbatoio, dato che:  $\tau_p = AR$

se  $A_1 > A_2$  segue che:  $\tau_{p1} > \tau_{p2}$ .

Ciò sta a significare che un serbatoio contraddistinto da una sezione maggiore (capacità maggiore) ha anche una costante di tempo maggiore. Al contrario il guadagno statico resta costante, infatti:  $K_p = R$

# Esempio: processo primo ordine capacitivo

La risposta di un serbatoio ad un **medesimo disturbo a gradino** nella portata entrante è differente **a seconda della sua sezione** e quindi della capacità di contenimento.



Se la portata entrante viene disturbata a gradino, il serbatoio avente **area inferiore** reagisce **più velocemente** rispetto a quello avente **area maggiore** ma alla fine **entrambi raggiungono lo stesso stazionario** (livello finale).

# Esempio: processo primo ordine capacitivo

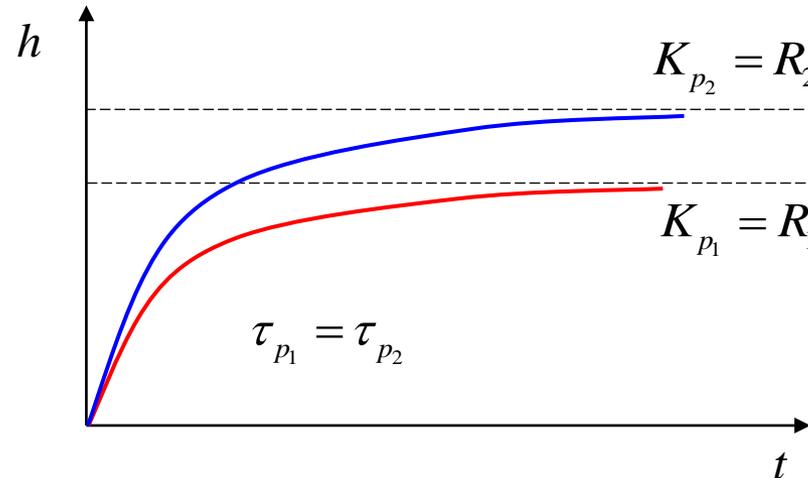
Si supponga ora che **due serbatoi abbiano sia sezioni ( $A$ ) che resistenze ( $R$ ) differenti**, tali che:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

ciò significa che:  $\tau_{p_1} = A_1 R_1 = A_2 R_2 = \tau_{p_2}$

Ma se  $A_1 > A_2$  allora deve anche essere:  $R_2 > R_1$  e quindi:  $K_{p_2} > K_{p_1}$

che si traduce nel seguente andamento:



# Esempio: processo primo ordine capacitivo

Dato che entrambi i serbatoi hanno la stessa costante di tempo ne consegue che hanno la stessa velocità di risposta iniziale.

Col procedere del tempo però il serbatoio con la resistenza idraulica maggiore ( $R_2$ ) fa fluire una minor portata uscente. Cosicché il livello nel serbatoio 2 cresce maggiormente rispetto al livello nel serbatoio 1.

È possibile concludere che maggiore è il guadagno statico di un sistema, maggiore risulta la sua risposta (output) a transitorio esaurito a parità di modifica delle condizioni di ingresso (input).



# Sistemi con costante di tempo e guadagno variabili

Riconsideriamo il **modello linearizzato** del serbatoio, avente portata di efflusso dipendente dal battente di liquido, **scritto in termini di variabili di scostamento**:

$$A \frac{dh'}{dt} + \frac{\xi}{2\sqrt{h_s}} h' = F_i'$$

ove il pedice  $s$  indica la condizione di stazionarietà.

In termini di costante di tempo e guadagno statico ciò equivale a scrivere:

$$\tau_p \frac{dh'}{dt} + h' = K_p F_i'$$

da cui segue che:  $\tau_p = 2A\sqrt{h_s}/\xi$      $K_p = 2\sqrt{h_s}/\xi$

Si noti che sia  $\tau_p$  che  $K_p$  dipendono da  $h_s$  e quindi dalla condizione di stazionarietà raggiunta dal serbatoio che a sua volta dipende dal valore stazionario della portata entrante:  $F_{i,s}$ . In questo caso  $\tau_p$  e  $K_p$  non sono costanti bensì variabili.

# Sistemi del secondo ordine



# Sistemi del secondo ordine

Un **sistema** del **secondo ordine** è caratterizzato da un' **equazione differenziale del secondo ordine** descrivente la dinamica della variabile di output  $y(t)$ :

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b f(t)$$

Se  $a_0 \neq 0$  allora si ottiene:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = K_p f(t)$$

$$\text{ove: } \tau^2 = \frac{a_2}{a_0} \quad 2\zeta\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad K_p = \frac{b}{a_0}$$

Si definiscono:

- $\tau$  = periodo naturale di oscillazione del sistema
- $\zeta$  = fattore di smorzamento
- $K_p$  = guadagno statico (o stazionario) del sistema



Stesso significato fisico dei sistemi del primo ordine

# Sistemi del secondo ordine

Sistemi del **secondo ordine o superiore** possono nascere da situazioni fisiche disparate. È possibile classificarli secondo **tre categorie distinte**:

1. **Processi multicapacitivi**: sono costituiti da due o più sistemi capacitivi (*i.e.* sistemi del primo ordine) in serie attraverso i quali si ha flusso materiale o energetico;
2. **Sistemi intrinseci** del secondo ordine: sono i fluidi o gli elementi meccanici di un processo dotati di inerzia e sottoposti ad accelerazione. Questi sistemi sono rari nell'ingegneria chimica;
3. Un **processo con il suo controllore** può mostrare un comportamento di sistema del secondo ordine o superiore. Il controllore, interagendo con il sistema, aggiunge un'ulteriore dinamica che si esplica in un ordine superiore del sistema complessivo.

In un processo chimico la maggior parte dei sistemi del secondo ordine o superiori è rappresentata da processi multicapacitivi o dall'accoppiamento con il controllore.



# Risposta dinamica di sistemi del secondo ordine

L'integrazione analitica dell'equazione differenziale del secondo ordine descrivente la dinamica del sistema di pari ordine dipende significativamente dal parametro  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{a_1}{2\tau a_0} = \frac{a_1}{2\sqrt{\frac{a_2}{a_0}a_0}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

**N.B.:** il passaggio precedente può essere condotto soltanto se  $a_0$  è positivo.

**N.B.:** per come è stato definito  $\tau$ , occorre che  $a_0$  e  $a_2$  siano di ugual segno.

È possibile distinguere **tre dinamiche distinte** in funzione del **valore** di  $\zeta$ :

- $\zeta > 1$  sistemi **sovrasmorzati**
- $\zeta = 1$  sistemi a **smorzamento critico**
- $\zeta < 1$  sistemi **sottosmorzati**

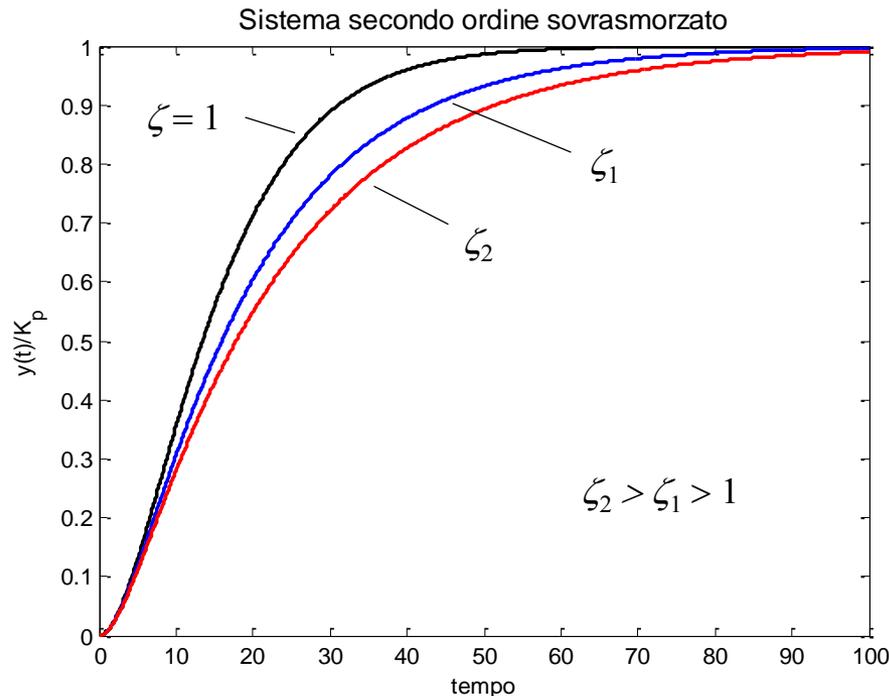


# Sistemi sovrasmorzati

La **soluzione analitica** dell'equazione differenziale di secondo ordine a fronte di un gradino unitario sull'input  $f(t)$  per  $\zeta > 1$  è:

$$y(t) = K_p \left[ 1 - e^{-\zeta t/\tau} \left( \cosh \left( \sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \left( \sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) \right) \right]$$

dove:  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$        $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



# Sistemi sovrasmorzati

La risposta di un sistema del secondo ordine sovrasmorzato assomiglia a quella di un sistema del primo ordine con gradino unitario sull'input.

In realtà il sistema del secondo ordine presenta un **ritardo** nella risposta iniziale ed inoltre la sua risposta complessiva è relativamente **lenta**.

La risposta diviene progressivamente più lenta con l'aumentare di  $\zeta$ .

Come avveniva per il sistema del primo ordine, anche nel caso del secondo ordine il processo tende asintoticamente al **guadagno statico**  $K_p$ :

$$K_p = \frac{\Delta(\text{output})}{\Delta(\text{input})}$$

**N.B.:** sistemi in serie del primo ordine presentano una risposta complessiva sovrasmorzata.



# Sistemi a smorzamento critico

Nel caso di  $\zeta = 1$  la risposta del sistema del secondo ordine ad un gradino unitario dell'input è pari a:

$$y(t) = K_p \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right]$$

**N.B.:** come già mostrato in precedenza, un sistema a smorzamento critico raggiunge la nuova condizione stazionaria asintotica in un tempo inferiore rispetto ai sistemi sovrasmorzati.



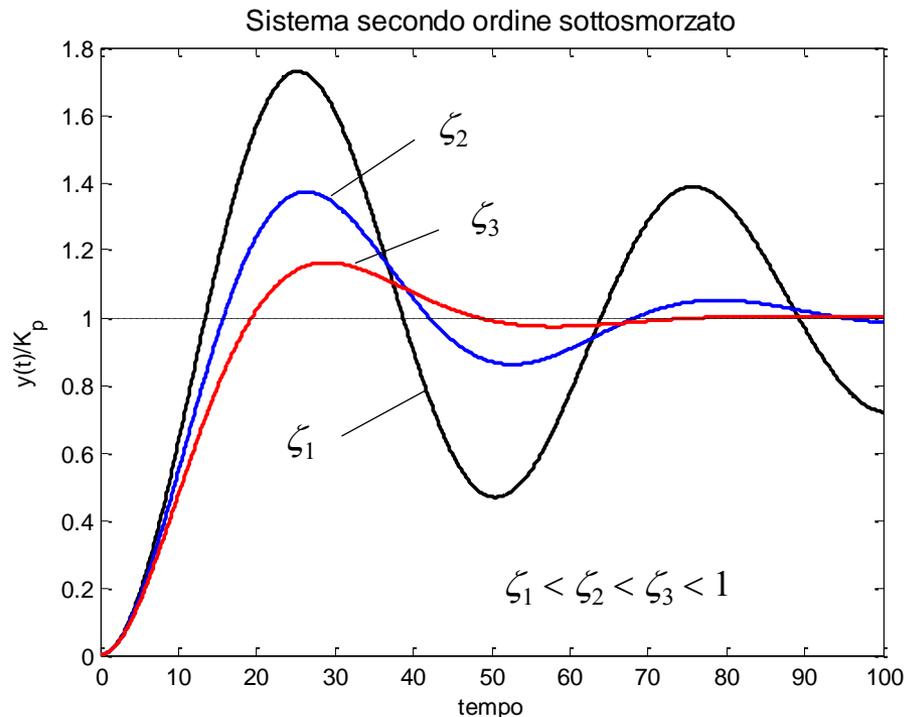
# Sistemi sottosmorzati

La **soluzione analitica** dell'equazione differenziale di secondo ordine a fronte di un gradino unitario sull'input  $f(t)$  per  $\zeta < 1$  è:

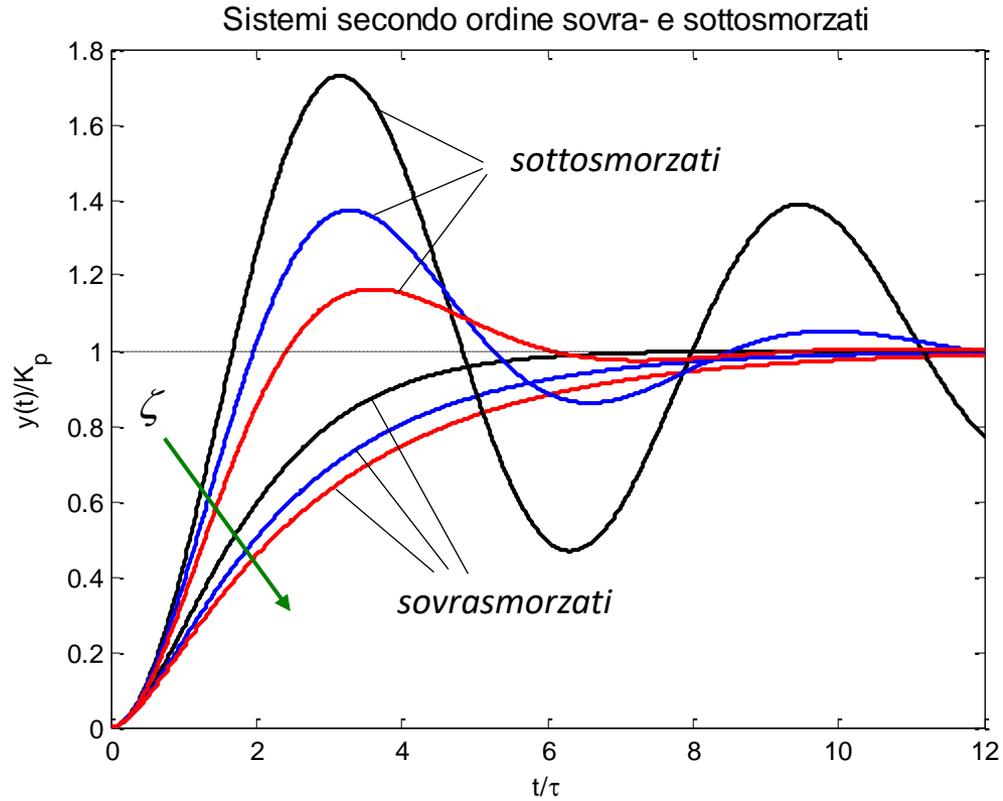
$$y(t) = K_p \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \sin(\omega t + \phi) \right]$$

$$\text{con: } \omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

$$\phi = \text{atan} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$



# Confronto tra sistemi sovra- e sottosmorzati



# Confronto tra sistemi sovra- e sottosmorzati

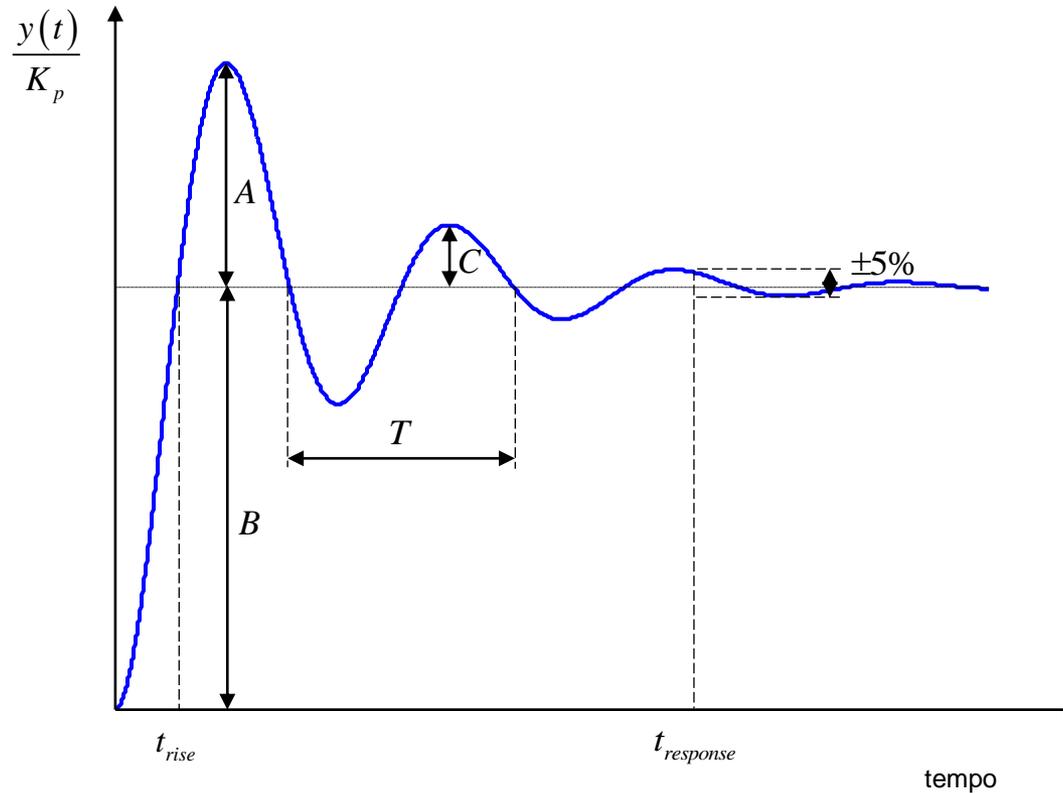
È possibile evidenziare le seguenti differenze tra sistemi sovra- e sottosmorzati:

- la risposta dei sistemi sottosmorzati ( $\zeta < 1$ ) è inizialmente più veloce dei sistemi sovrasmorzati ( $\zeta \geq 1$ ) che sono intrinsecamente più lenti;
- sebbene la risposta sottosmorzata sia inizialmente più veloce e raggiunga prima (per la prima volta) il guadagno statico, in seguito oscilla con un andamento progressivamente smorzato;
- le oscillazioni risultano progressivamente maggiori col decrescere di  $\zeta$ .

**N.B.:** nei processi chimici quasi tutte le risposte dei **sistemi sottosmorzati** sono dovute all'**interazione con controllori**.



# Caratteristiche sistemi sottosmorzati



Si definiscono:

$$\text{Overshoot} = \frac{A}{B} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$



# Caratteristiche sistemi sottosmorzati

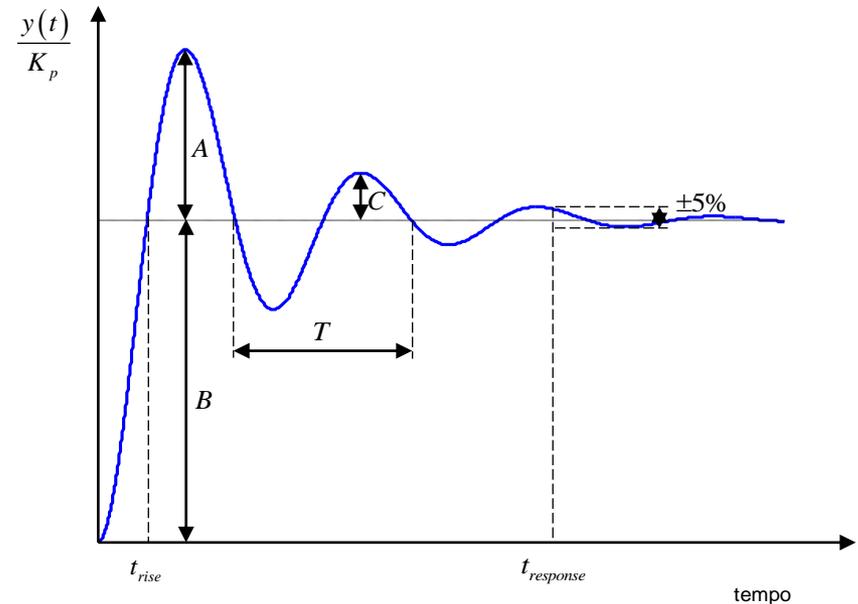
$$\text{Decay ratio} = \frac{C}{A} = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = (\text{overshoot})^2$$

**Periodo di oscillazione:**  $T$

rammentando che:  $\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$

e che:  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

segue che:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$



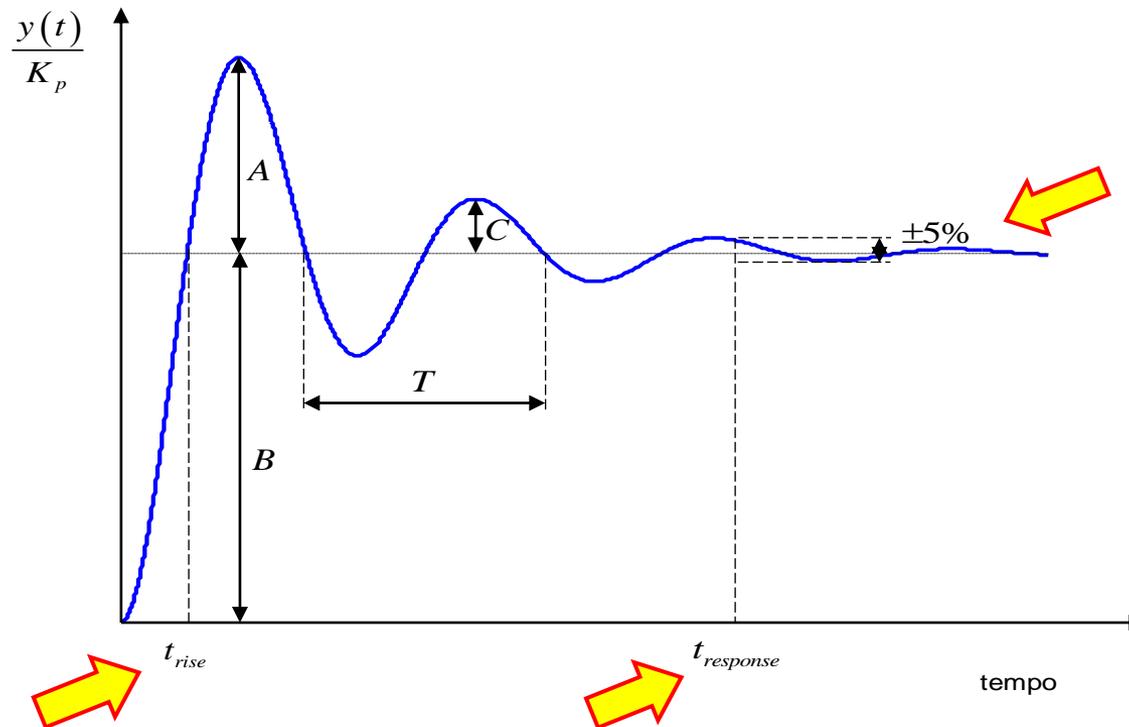
Si noti che se un sistema del secondo ordine sottosmorzato è caratterizzato da

$\zeta = 0$  allora è libero da qualsiasi smorzamento (quindi oscilla continuamente senza alcun smorzamento) con un periodo pari a:  $T = 2\pi\tau$

# Caratteristiche sistemi sottosmorzati

Altre due grandezze caratteristiche di un sistema sottosmorzato sono:

- **Rise time**
- **Response time** ovvero il tempo impiegato dal sistema per smorzare le oscillazioni sotto il 5% rispetto al guadagno statico raggiunto a transitorio esaurito

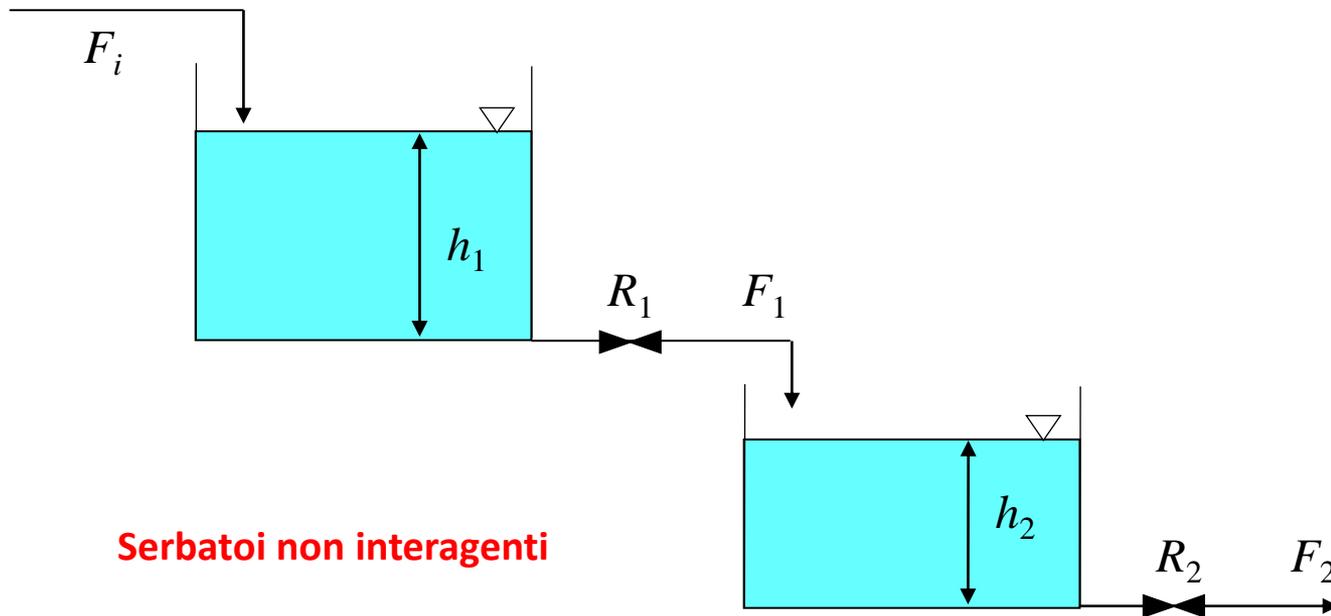


# Processi multicapacitivi del secondo ordine

Quando della materia o dell'energia fluiscono attraverso un singolo elemento capacitivo il sistema è del primo ordine.

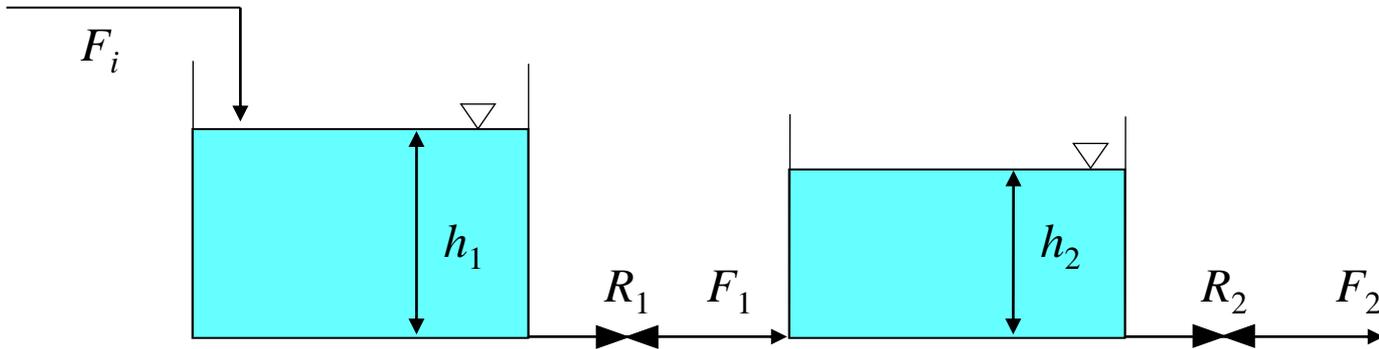
Nel caso invece di **flusso (di materia e/o energia) attraverso due elementi capacitivi in serie** (e.g., due serbatoi) il sistema complessivo risulta del **secondo ordine**.

Con riferimento a due serbatoi in serie è possibile distinguere i seguenti casi:



Serbatoi non interagenti

# Processi multicapacitivi del secondo ordine



## Serbatoi interagenti

Nel primo caso i serbatoi non interagiscono, la portata uscente dal primo viene immessa nel secondo. Quindi ci aspettiamo che la portata uscente dal secondo dipenda da quella uscente dal primo ma non viceversa.

Al contrario nel caso di serbatoi interagenti la portata uscente dal secondo dipende dalla differenza di battente liquido esistente tra i due. Quindi anche il livello del primo serbatoio dipende dalla dinamica evolutiva del secondo serbatoio.

# Elementi capacitivi non interagenti

Si consideri il caso dei due elementi capacitivi non interagenti. Qualitativamente si ha il seguente sistema ODE:

$$\begin{cases} \tau_{p_1} \frac{dy_1}{dt} + y_1 = K_{p_1} f_1(t) & \leftarrow \text{primo elemento capacitivo} \\ \tau_{p_2} \frac{dy_2}{dt} + y_2 = K_{p_2} y_1(t) & \leftarrow \text{secondo elemento capacitivo} \end{cases}$$

è possibile notare come la **forzante** della seconda equazione differenziale, che descrive la dinamica del secondo elemento capacitivo, sia funzione dell'output del **primo** elemento capacitivo.

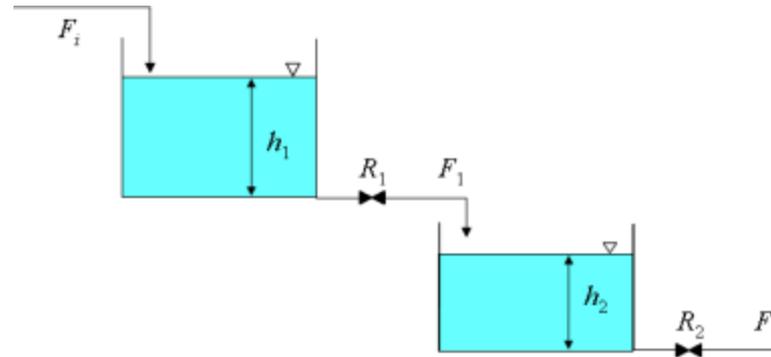
La **risposta complessiva** del sistema è del **secondo ordine** ed è possibile dimostrare che il sistema risultante è **sempre sovrasmorzato** o **al limite a smorzamento critico**.

La risposta del sistema è:

$$y(t) = K_{p_1} K_{p_2} \left[ 1 + \frac{1}{\tau_{p_2} - \tau_{p_1}} \left( \tau_{p_1} e^{-t/\tau_{p_1}} - \tau_{p_2} e^{-t/\tau_{p_2}} \right) \right]$$

# Due serbatoi in serie non interagenti

Nel caso specifico di due serbatoi non interagenti si ha:

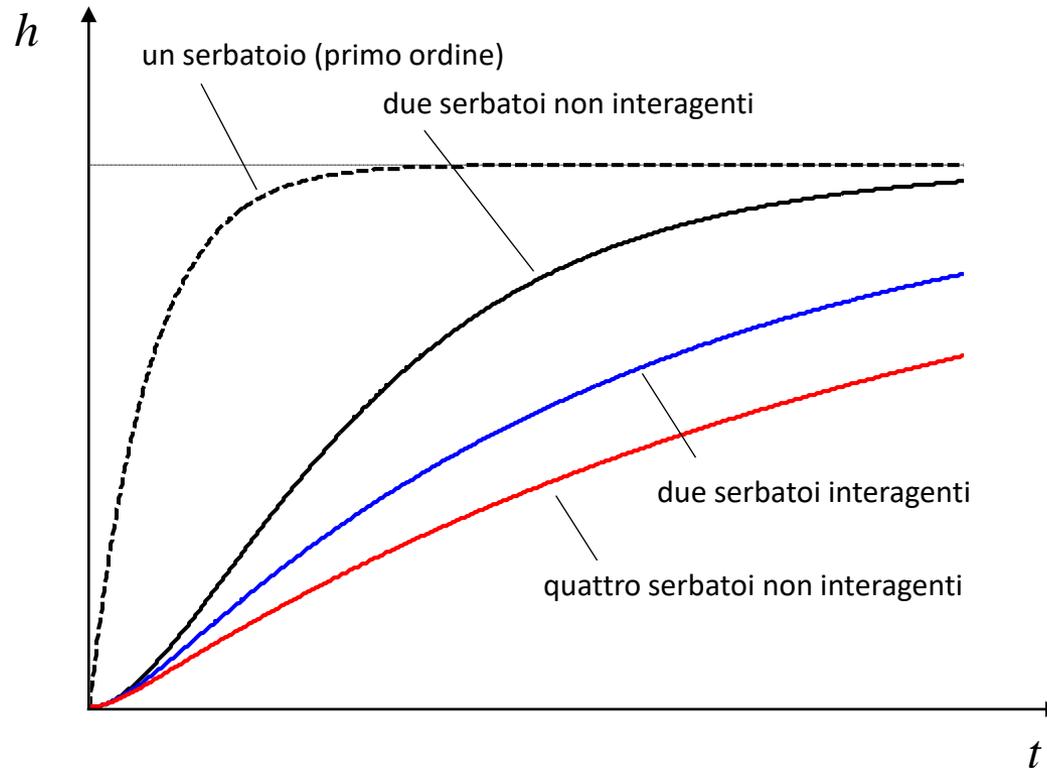


$$h_2(t) = K_{p1} K_{p2} \left[ 1 + \frac{1}{\tau_{p2} - \tau_{p1}} \left( \tau_{p1} e^{-t/\tau_{p1}} - \tau_{p2} e^{-t/\tau_{p2}} \right) \right] \quad \text{sse } \tau_{p1} \neq \tau_{p2}$$

La risposta di questo sistema dinamico del secondo ordine è a sigmoide. È più lenta di quella di un singolo serbatoio e la lentezza della risposta è caratterizzata da un ritardo tipico dei processi multicapacitivi.

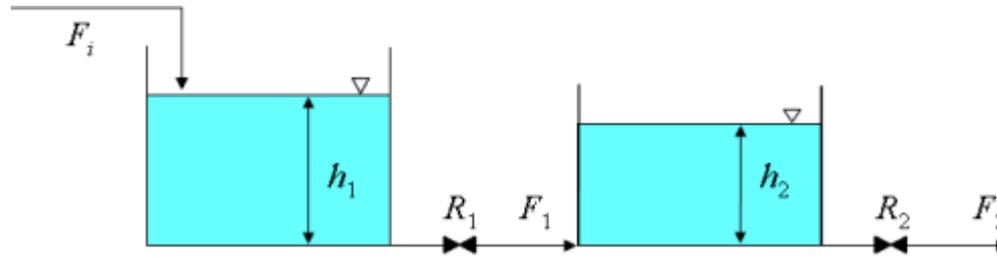
**N.B.:** più aumenta il numero degli elementi capacitivi in serie, maggiore è il ritardo (e quindi la lentezza di risposta) del sistema risultante.

# Serbatoi in serie non interagenti



# Due serbatoi in serie interagenti

Due serbatoi in serie ed interagenti sono caratterizzati dal seguente sistema ODE:



$$\begin{cases} A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_i - F_1 & \leftarrow \text{bil. mat. primo serbatoio} \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = F_1 - F_2 & \leftarrow \text{bil. mat. secondo serbatoio} \end{cases}$$

Se si assumono resistenze lineari è possibile scrivere:

$$F_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad F_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

ove è già possibile notare come la portata uscente dal primo serbatoio dipenda anche dal battente del secondo.

# Due serbatoi in serie interagenti

Il sistema ODE assume la forma:

$$\begin{cases} A_1 R_1 \frac{dh_1}{dt} + h_1 - h_2 = R_1 F_i \\ A_2 R_2 \frac{dh_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) h_2 - \frac{R_2}{R_1} h_1 = 0 \end{cases}$$

entrambe le equazioni differenziali debbono essere **risolte simultaneamente**. Questa è una caratteristica degli elementi capacitivi interagenti.

Un'analisi matematica del sistema permette di evidenziare i seguenti punti:

- le **costanti di tempo** dei due serbatoi sono rispettivamente  $\tau_{p1} = A_1 R_1$  e  $\tau_{p2} = A_2 R_2$ . Le risposte dei due serbatoi sono entrambe del secondo ordine;
- esiste un termine che descrive il **grado di interazione** dei serbatoi e vale:  $A_1 R_2$ . Più  $A_1 R_2$  è grande, maggiore è l'interazione dei due serbatoi;
- la **risposta** dinamica dei due serbatoi è sempre **sovrasmorzata**.

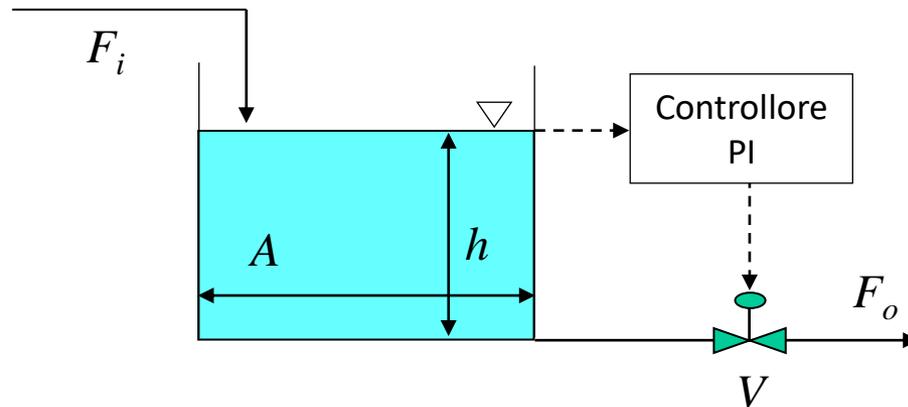


# Sistemi del II ordine per azione del controllore

L'azione di un sistema di controllo in un processo chimico può modificare la risposta dinamica e quindi l'ordine del sistema controllato.

A titolo esemplificativo si consideri un processo del primo ordine quale un singolo serbatoio.

A livello processistico si desidera controllare il suo livello (*i.e.* si assegna un setpoint) quando la portata entrante  $F_i$  subisce un cambiamento a gradino.



# Sistemi del II ordine per azione del controllore

Si introduce un sistema di controllo in retroazione che misura il livello del serbatoio e lo confronta con il valore desiderato (*i.e.* setpoint). Se il livello supera il setpoint il controllore incrementa la portata uscente  $F_o$  mentre in caso contrario la decrementa. La portata uscente  $F_o$  viene incrementata aprendo la valvola  $V$  posta sul condotto di uscita.

Il sistema dinamico in termini di variabili di scostamento è:

$$A \frac{dh'}{dt} = F_i' - F_o'$$

dove le variabili di scostamento sono:

$$h' = h - h_s \quad F_i' = F_i - F_{i,s} \quad F_o' = F_o - F_{o,s}$$

Quando il liquido non è al valore desiderato ( $h_s$ ) allora  $h' \neq 0$ .



# Sistemi del II ordine per azione del controllore

La deviazione esistente  $h'$  dal valore di setpoint viene utilizzata dal sistema di controllo per variare la portata uscente  $F_o$  secondo la seguente legge:

$$F_o = F_{o,s} + K_c h' + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t h'(t) dt$$

dove  $K_c$  e  $\tau_I$  sono due opportune costanti positive del sistema di controllo.

Si noti che nel caso di  $h' = 0$  costante nel tempo allora  $F_o = F_{o,s}$ .

L'azione del controllore è detta proporzionale-integrale. Sostituendo  $F_o$  nell'equazione di bilancio materiale del serbatoio si ottiene:

$$A \frac{dh'}{dt} + K_c h' + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t h' dt = F_i'$$

# Sistemi del II ordine per azione del controllore

È possibile dimostrare analiticamente che il sistema costituito dal serbatoio e dal controllore è del secondo ordine ove il periodo naturale di oscillazione  $\tau$ , il guadagno statico  $K_p$  e il fattore di smorzamento  $\zeta$  valgono rispettivamente:

$$\tau = \sqrt{\frac{A\tau_I}{K_c}} \quad K_p = \frac{\tau_I}{K_c} \quad \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_c\tau_I}{A}}$$

In funzione dei valori dei parametri di controllo  $K_c$  e  $\tau_I$  si hanno i seguenti casi:

- se  $\sqrt{\frac{K_c\tau_I}{A}} < 2 \Rightarrow \zeta < 1$  allora il sistema è **sottosmorzato\***;
- se  $\sqrt{\frac{K_c\tau_I}{A}} = 2 \Rightarrow \zeta = 1$  allora il sistema ha **smorzamento critico**;
- se  $\sqrt{\frac{K_c\tau_I}{A}} > 2 \Rightarrow \zeta > 1$  allora il sistema è **sovrasmorzato**.

\*Vedi anche slide L3.72



# Sistemi di ordine superiore



# Sistemi dinamici di ordine superiore al secondo

Non è raro avere sistemi dell'industria di processo la cui risposta dinamica sia superiore al secondo ordine.

Sono date tre classi di sistemi di ordine superiore al secondo:

- processi caratterizzati da  $N$  elementi del primo ordine in serie (**processi multicapacitivi**)
- processi con **tempo morto** (dead time)
- processi con **risposta inversa**



# $N$ elementi capacitivi in serie

Nel caso di processi caratterizzati da  $N$  elementi capacitivi del primo ordine in serie la dinamica complessiva è di ordine  $N$ .

Ciò indipendentemente dal fatto che gli  $N$  sistemi siano interagenti o meno.

Nel caso di elementi non interagenti la risposta è sovrasmorzata con il tipico andamento a sigmoide. La lentezza del sistema risultante aumenta con il numero di elementi in serie.

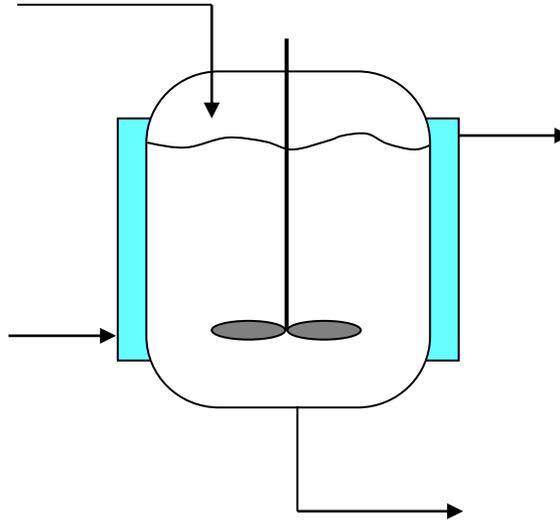
Nel caso di elementi interagenti la lentezza di risposta del sistema è superiore rispetto al caso degli elementi non interagenti.

**N.B.:** nel caso di  $N$  elementi capacitivi in serie il sistema di controllo dovrà espletare anche il compito di incrementare la responsività del processo.



# N elementi capacitivi in serie

Si consideri un reattore riscaldato tramite fluido caldo in camicia:



È possibile osservare che si hanno i seguenti elementi capacitivi interagenti:

- capacità materiale totale del reattore
- capacità termica del reattore (nel senso del serbatoio)
- capacità termica delle pareti del reattore
- capacità termica dell'acqua calda di riscaldamento nella camicia laterale

**N.B.:** in totale si hanno 4 elementi capacitivi interagenti (sistema del IV ordine)

# $N$ elementi capacitivi in serie

Più in generale sistemi di separazione G-L come le colonne di distillazione, gli assorbitori o gli *strippers* sono caratterizzati da  $N$  stadi. **Ogni stadio è caratterizzato da due elementi capacitivi costituiti dalle capacità massive e termiche.**

**Dati  $N$  stadi si hanno  $2N$  elementi capacitivi in serie interagenti.**

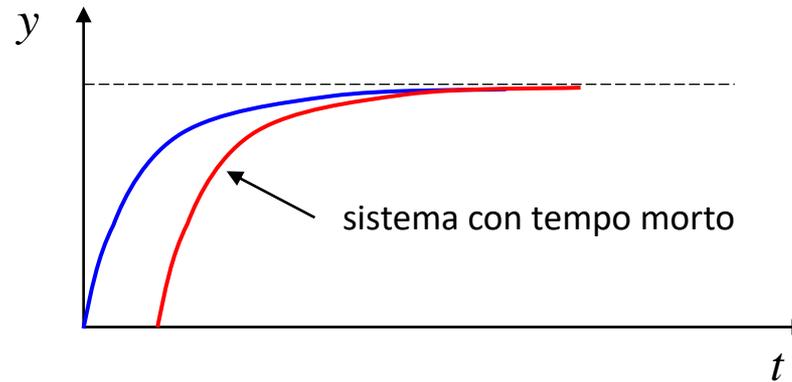
Conseguentemente, un cambiamento a gradino sul rapporto di riflusso di una colonna di distillazione avrà un effetto molto veloce sulla composizione di testa mentre si esplicherà con una dinamica molto più lenta sulla composizione di coda (ritardo e lentezza della risposta).

Analogamente, un disturbo a gradino sulla portata di olio caldo al ribollitore ha un effetto praticamente immediato sulla composizione della portata vaporizzata in coda alla colonna mentre ha un effetto ritardato sul prodotto di testa (ritardo e lentezza della risposta).



# Sistemi con tempo morto (dead time)

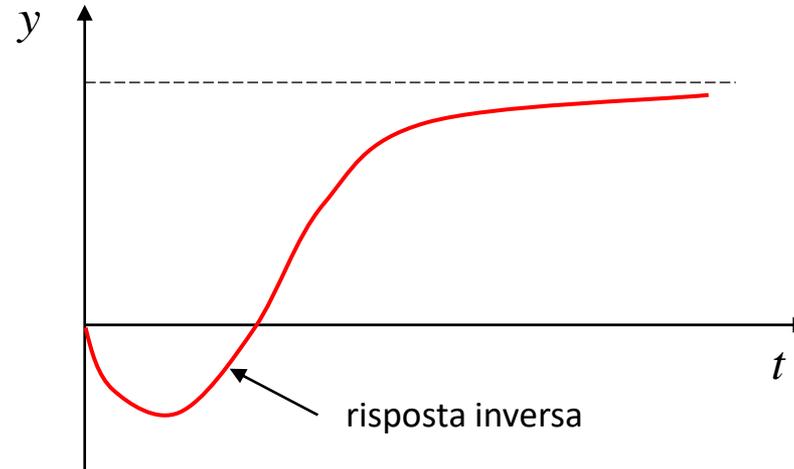
Praticamente tutti i sistemi dinamici sono caratterizzati da un tempo di ritardo tra l'input e la risposta in output del processo. Ciò è dovuto all'inerzia (materiale e termica) del sistema.



Sistemi caratterizzati da un tempo morto significativo risultano più difficili da controllare (soprattutto in un'ottica di controllo in retroazione) in quanto l'output non contiene alcuna informazione riguardo gli eventi attuali (*i.e.* variabili di input e disturbi).

# Sistemi con risposta inversa

Ci sono dei sistemi la cui risposta iniziale ad un disturbo di una variabile di input ha direzione opposta rispetto al valore finale raggiunto a fine transitorio.



# Risposta inversa del livello in una caldaia

Si consideri una **caldaia** che produce vapore.

Se si incrementa la portata di acqua fredda alla caldaia con una variazione a gradino, all'inizio (e per un breve periodo) il livello di liquido nella caldaia diminuisce.

Successivamente il livello di liquido nella caldaia aumenta.

Complessivamente è possibile evidenziare **due effetti opposti sulla dinamica del sistema** complessivo:

- la portata di acqua fredda produce una diminuzione della temperatura che induce una diminuzione del volume delle bolle di vapore che si liberano dalla massa liquida. Si ha quindi una diminuzione del livello dell'acqua all'ebollizione;
- l'apporto costante di calore porta ad una produzione costante di vapore e di conseguenza il livello di liquido dell'acqua all'ebollizione dopo un certo periodo inizia ad aumentare (con un contributo integrale puramente capacitivo).



# Risposta inversa della temperatura in un forno

Si consideri un **forno di incenerimento rifiuti** che brucia RSU con un potere calorifico positivo (*i.e.* il rifiuto bruciando cede calore al sistema).

Se si incrementa la portata di rifiuto alimentata, inizialmente la temperatura all'interno del forno diminuisce mentre su un orizzonte temporale più ampio aumenta.

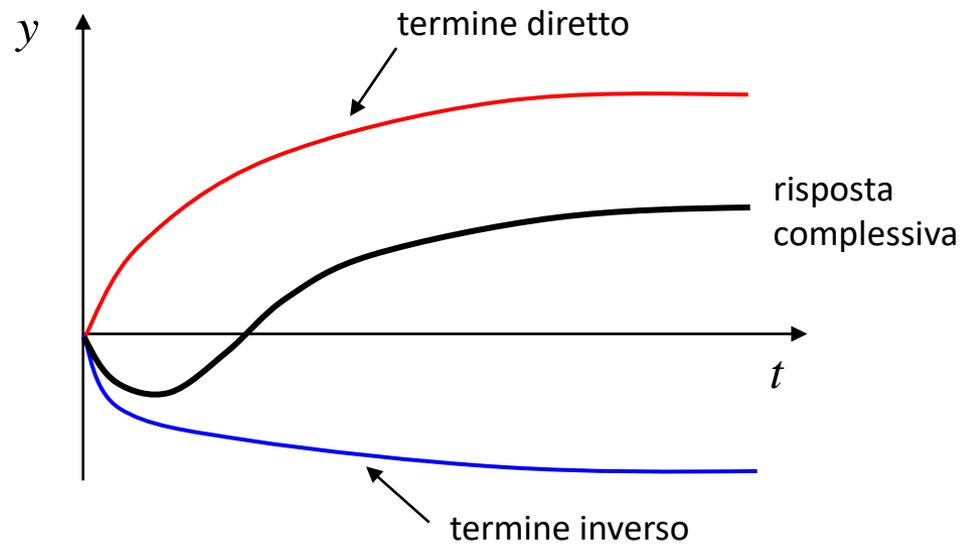
Complessivamente è possibile evidenziare **due effetti opposti sulla dinamica del sistema** complessivo:

- inizialmente il rifiuto alimentato si trova alla temperatura presente nella fossa di raccolta (*i.e.* ambiente). Questo assorbe calore dal forno per riscaldarsi e far evaporare la frazione di umidità in esso contenuta. La temperatura del forno si abbassa;
- dopo l'iniziale transitorio, il rifiuto inizia a bruciare liberando complessivamente un calore positivo (*i.e.* combustione, reazione esotermica) ed innalzando la temperatura del forno grazie all'incremento di portata alimentata.



# Risposta inversa dei sistemi

La risposta inversa di un sistema può essere vista come la somma (*i.e.* contributo) di due sottomisposte aventi direzione opposta:



# Appendice: trasformazione di ODE di ordine $n$

Un'equazione differenziale di ordine  $m$  che sia della forma:

$$\mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}, t)$$

con le condizioni iniziali:

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad \mathbf{y}'(t_0) = \mathbf{y}'_0 \quad \dots \quad \mathbf{y}^{(m-1)}(t_0) = \mathbf{y}_0^{(m-1)}$$

può essere trasformata in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine tramite l'introduzione di nuove variabili dipendenti ausiliarie.



# Appendice: trasformazione di ODE di ordine $n$

## Esempio

È data l'equazione differenziale:  $y''' = t y'' + y' + (1+t+y)^2 + \sin(t)$

con le condizioni iniziali:  $y''(0) = 1$     $y'(0) = 2$     $y(0) = 3$

Tale equazione può essere trasformata agevolmente in un sistema di equazioni differenziali di primo grado mediante sostituzione di variabili:

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y' = y_1' = y_2 \\ y'' = y_2' = y_3 \\ y''' = y_3' = t y_3 + y_2 + (1+t+y_1)^2 + \sin(t) \end{cases}$$

con le nuove condizioni iniziali (equivalenti alle precedenti):

$$y_3(0) = 1 \quad y_2(0) = 2 \quad y_1(0) = 3$$

Le variabili  $y_1, y_2, y_3$  sono le variabili dipendenti ausiliarie.

# Dinamica di un serbatoio con controllore PI

La costante di smorzamento ( $\zeta$ ) di un sistema del primo ordine, come un serbatoio pieno di liquido con un controllore PI, è data dall'equazione:

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_c \tau_i}{A}}$$

dove  $K_c$  e  $\tau_i$  sono le costanti del controllore PI e  $A$  è l'area del serbatoio. Se  $\zeta < 1$ , il sistema è sottosmorzato e oscilla anche se originariamente era del primo ordine ad anello aperto (open loop), ma diventa del secondo ordine ad anello chiuso (closed loop).

La domanda è perché, se  $A$  (l'area del serbatoio) aumenta,  $\zeta$  diminuisce, rendendo il sistema ancora più oscillante se  $\zeta$  è già  $< 1$ .

La costante di smorzamento ( $\zeta$ ) è una misura della capacità del sistema di tornare allo stato di equilibrio dopo essere stato disturbato. Quando  $\zeta$  è inferiore a 1, il sistema è sottosmorzato e oscillerà prima di raggiungere infine lo stato di equilibrio. Quando  $A$  (l'area del serbatoio) aumenta, l'inerzia materiale del serbatoio aumenta parimenti, il che rende più difficile per il sistema tornare allo stato di equilibrio.

La costante di smorzamento ( $\zeta$ ) è inversamente proporzionale alla radice quadrata di  $A$  (l'area del serbatoio). Ciò significa che se  $A$  aumenta,  $\zeta$  diminuisce, il che rende il sistema più oscillante. Questo perché l'aumento dell'inerzia materiale del serbatoio rende più difficile per il sistema tornare allo stato di equilibrio, facendolo oscillare per un periodo di tempo maggiore prima di raggiungere infine lo stato di equilibrio.

In sintesi, se  $\zeta$  è già inferiore a 1, indicando che il sistema è sottosmorzato e oscilla, aumentare l'area del serbatoio ( $A$ ) farà diminuire  $\zeta$ , rendendo il sistema ancora più oscillante. Questo perché l'aumento dell'inerzia materiale del serbatoio rende più difficile per il sistema tornare allo stato di equilibrio, facendolo oscillare per un periodo di tempo più lungo prima di raggiungere infine lo stato di equilibrio.

