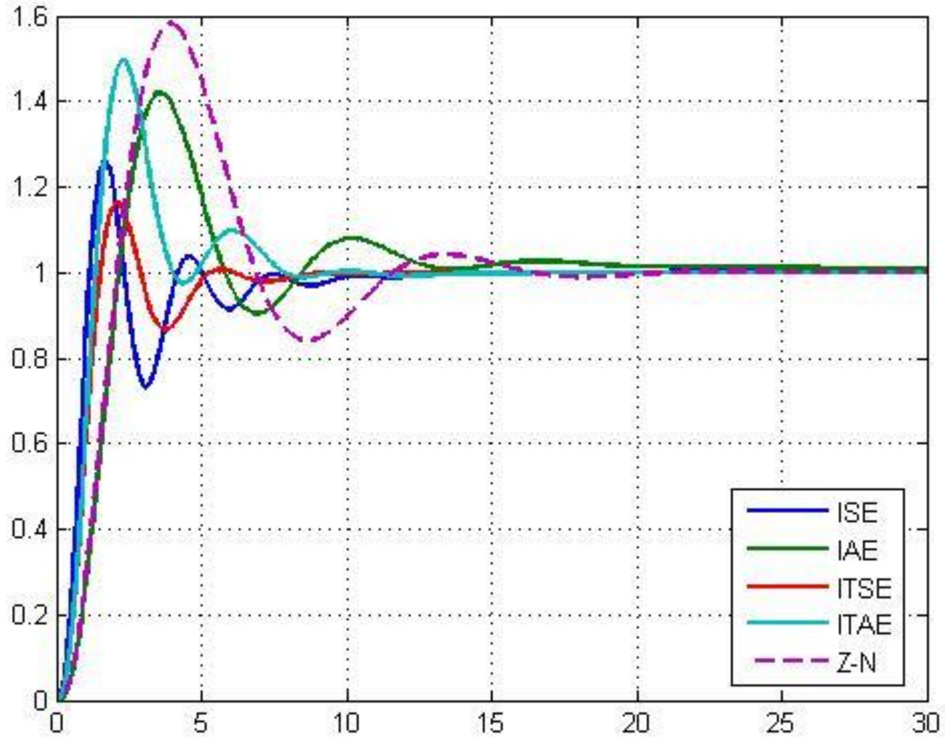
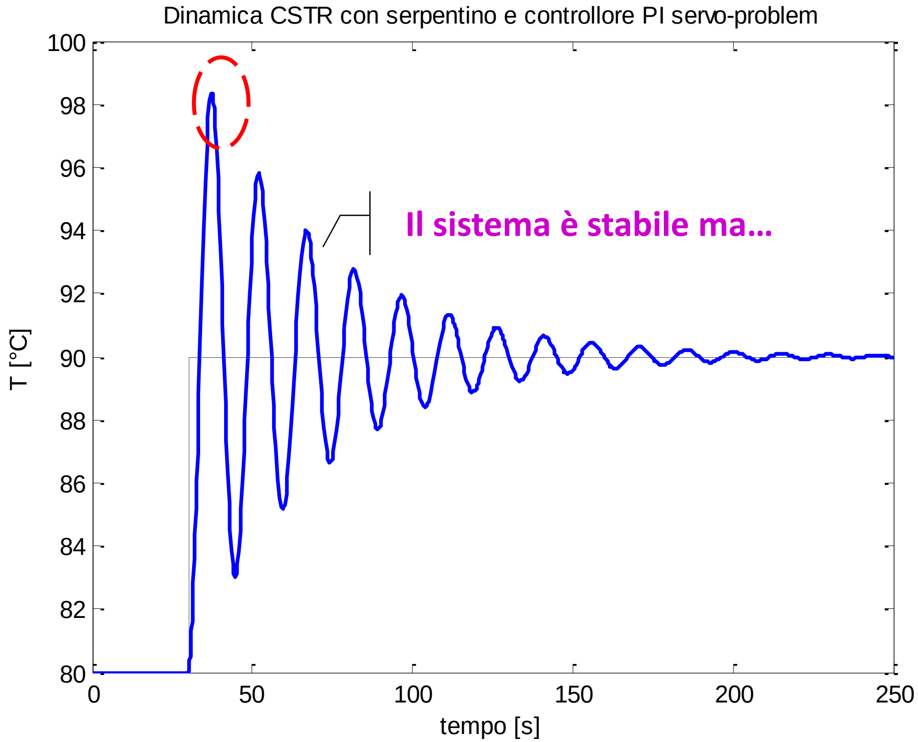
Sintesi di controllori in retroazione



Stabilità di sistemi controllati in retroazione

Nelle lezioni passate, si è visto come un controllore in retroazione possa introdurre instabilità nel sistema aumentandone l'ordine ed introducendo una componente oscillatoria nella dinamica evolutiva ad anello chiuso.



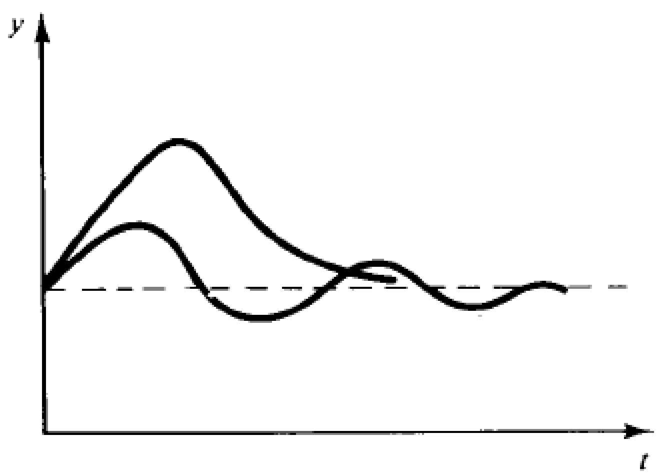
Un sistema controllato apparentemente ancora stabile può raggiungere delle condizioni operative non accettabili che lo fanno deviare dalla stabilità.

Cenni alla definizione di stabilità

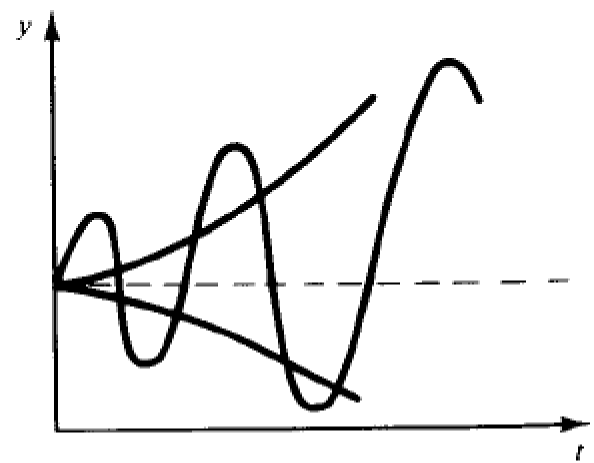
Una definizione sufficientemente semplificata di stabilità consiste in:

Un sistema dinamico è stabile se per ogni sollecitazione (*i.e.* input) finita fornisce una risposta (*i.e.* output) finita

Occorre precisare che dato che si ha a che fare con sistemi fisici reali non è possibile fornire una sollecitazione esterna ampia a piacere in quanto una qualsiasi variabile di input è comunque limitata (limite inferiore e superiore)



Sistema STABILE

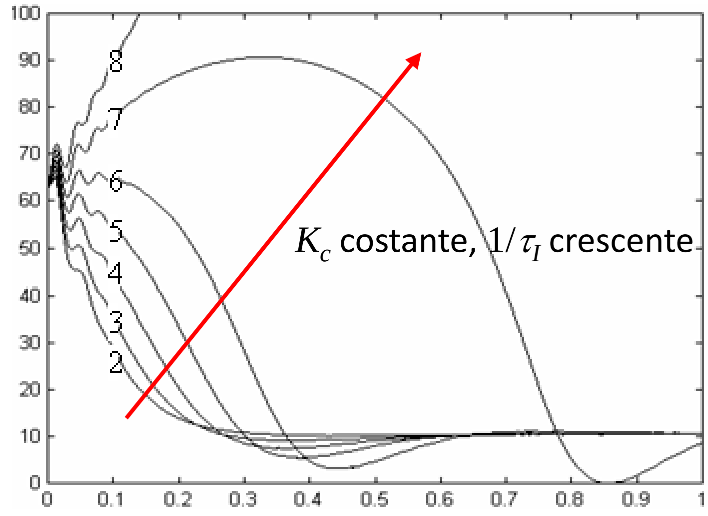


Sistema INSTABILE

Tratto da: Stephanopoulos, 1984

Cenni alla definizione di stabilità

È possibile dimostrare che particolari sistemi ad anello chiuso possono diventare **instabili** a seguito dell'**azione proporzionale-integrale** del controllore.



Tratto da: http://lejpt.academicdirect.org/A06/01_16.htm

Progettazione di controllori in retroazione

Quando si deve progettare un sistema di controllo in retroazione occorre rispondere alle seguenti domande:

1. Quale **tipo** di controllore occorre installare per controllare lo specifico processo?
2. Quali le **costanti** del controllore in termini di K_c, τ_I, τ_D?
3. Quale **indice di prestazione** occorre adottare per la selezione del sistema di controllo?

N.B.: per rispondere alla domanda (2) occorre effettuare la sintonizzazione del controllore (*i.e.* controller tuning) definito dalla tipologia (1) in base ad uno specifico indice di prestazione (3).

Progettazione di controllori in retroazione

Supponiamo ad esempio di avere selezionato, per qualche specifica ragione, un controllore proporzionale-integrale.

Occorre determinare il valore delle costanti K_c e τ_I che soddisfino un qualche **indice di prestazione**. A titolo di esempio si può pensare a:

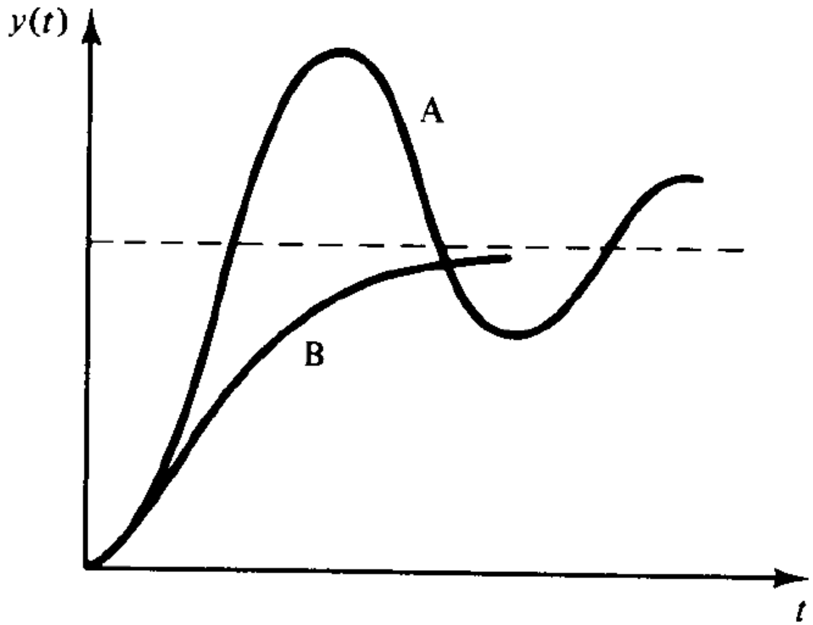
- mantenere la massima deviazione dal setpoint (*i.e.* l'errore $\varepsilon(t)$) la più piccola possibile;
- ridurre al massimo il settling-time;
- minimizzare l'integrale dell'errore finché il sistema non abbia raggiunto il nuovo setpoint;
- contenere l'eventuale overshoot del sistema;
- …

N.B.: indici di prestazione diversi conducono a costanti di controllo diverse.

Indici di prestazione

Indici di prestazione semplici

Se si considera la risposta qualitativa del sistema controllato riportato in figura:



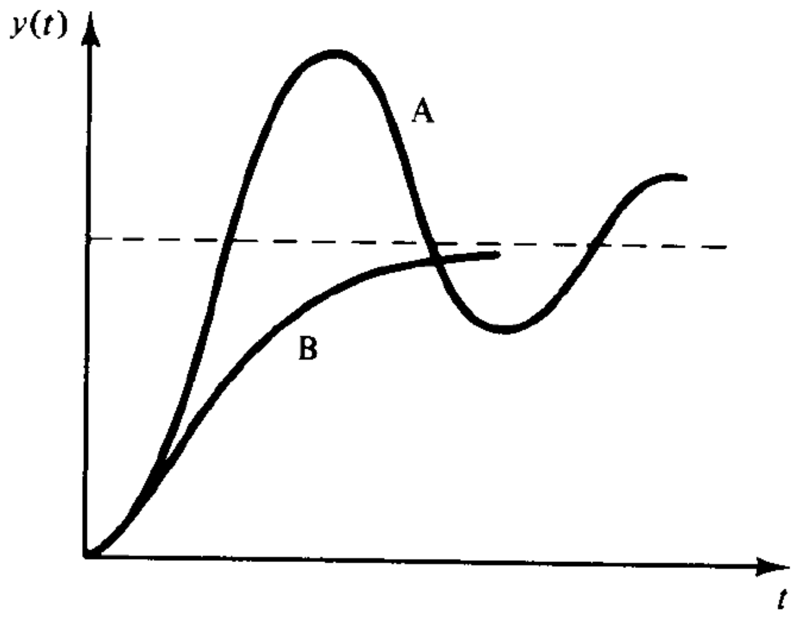
non è possibile affermare che la soluzione (A) sia migliore della (B), e neppure il contrario.

Occorre, infatti, contestualizzare la scelta in funzione dell'indice di prestazione adottato.

Indici di prestazione semplici

Se l'obiettivo è quello di ritornare il più presto possibile alla condizione di setpoint allora la soluzione (A) è quella vincente.

Se al contrario l'obiettivo è quello di mantenere la massima deviazione il più contenuta possibile o mantenersi vicini al setpoint nel tempo più breve, allora la soluzione da preferirsi è la (B).



Tratto da: Stephanopoulos, 1984

Indici di prestazione semplici

È possibile innanzitutto operare una distinzione tra indici di prestazione:

- stazionari
- dinamici (*i.e.* basati sulla risposta dinamica del sistema controllato)

Il discorso sugli **indici di prestazione stazionari** è presto liquidato. Esiste, infatti, un unico criterio basato sulla condizione raggiunta dal sistema controllato a transitorio esaurito. Si chiede che l'errore ε sia nullo in condizioni stazionarie.

Per quanto riguarda gli **indici di prestazione dinamici** si ha la seguente ulteriore classificazione:

- criteri che si basano soltanto su alcuni punti della risposta (sono anche detti: **criteri puntuali**)
- criteri che si basano sulla risposta completa del sistema nel corso del transitorio (sono anche detti: **criteri integrali** e **non sono semplici**)

Indici di prestazione semplici puntuali

Gli **indici di prestazione puntuali** basano la valutazione della qualità del controllore su alcune caratteristiche della risposta del sistema ad anello chiuso.

I più comuni sono:

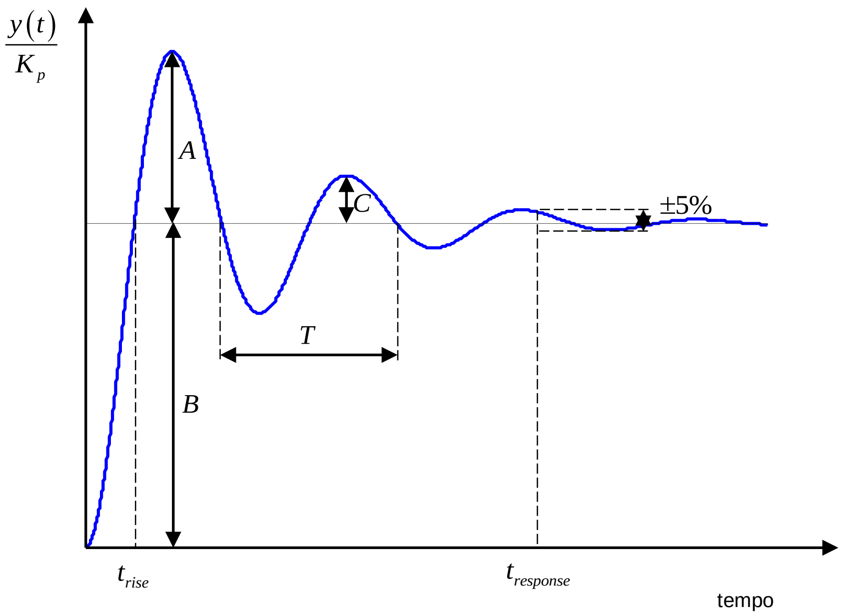
- overshoot
- rise time
- settling time
- decay ratio
- frequenza di oscillazione del transitorio

Questi indici possono essere utilizzati individualmente o in combinazione.

Indici di prestazione semplici puntuali

Nel caso di sistemi del secondo ordine sottosmorzati, uno dei criteri più usati (e semplici) è quello del **decay ratio** che viene fissato in un quarto, $C/A = 1/4$.

Da qui il nome di *one quarter decay ratio*.



N.B.: a seconda della natura del sistema controllato alcuni indici di prestazione non sono applicabili (*e.g.*, non sempre è detto che un processo presenti sovraelongazione).

Indici di prestazione integrali

In alternativa alla misura della prestazione del sistema in singoli punti è possibile analizzarne la risposta lungo l'intero arco temporale interessato dal transitorio del processo. Si parla in questo caso di **indici di prestazione integrali** che quantificano in varia misura lo scostamento del sistema dal setpoint nel corso del transitorio.

Si ha:

- Integral of Square Error, ISE: $ISE = \int_0^{+\infty} \varepsilon^2(t)\, dt$
- Integral of the Absolute value of Error, IAE: $IAE = \int_0^{+\infty} \left|\varepsilon(t)\right| dt$
- Integral of the Time-weighted Absolute Error, ITAE: $ITAE = \int_0^{+\infty} t\left|\varepsilon(t)\right| dt$

Dove: $\varepsilon(t) = y_{SP}(t) - y(t)$ misura la distanza del sistema dal setpoint assegnato.

Indici di prestazione integrali

La **sintonizzazione dei parametri** del controllore in retroazione si riduce ad un problema di ottimo consistente nella **minimizzazione dell'indice di prestazione** (*i.e.* ISE, IAE, ITAE) con gradi di libertà le costanti del controllore (*i.e.* K_c, τ_I, τ_D):

$$\underset{K_c,\tau_I,\tau_D}{\mathrm{Min}} \left\{ ISE \right\}$$

$$o$$

$$\underset{K_c,\tau_I,\tau_D}{\mathrm{Min}} \left\{ IAE \right\}$$

$$o$$

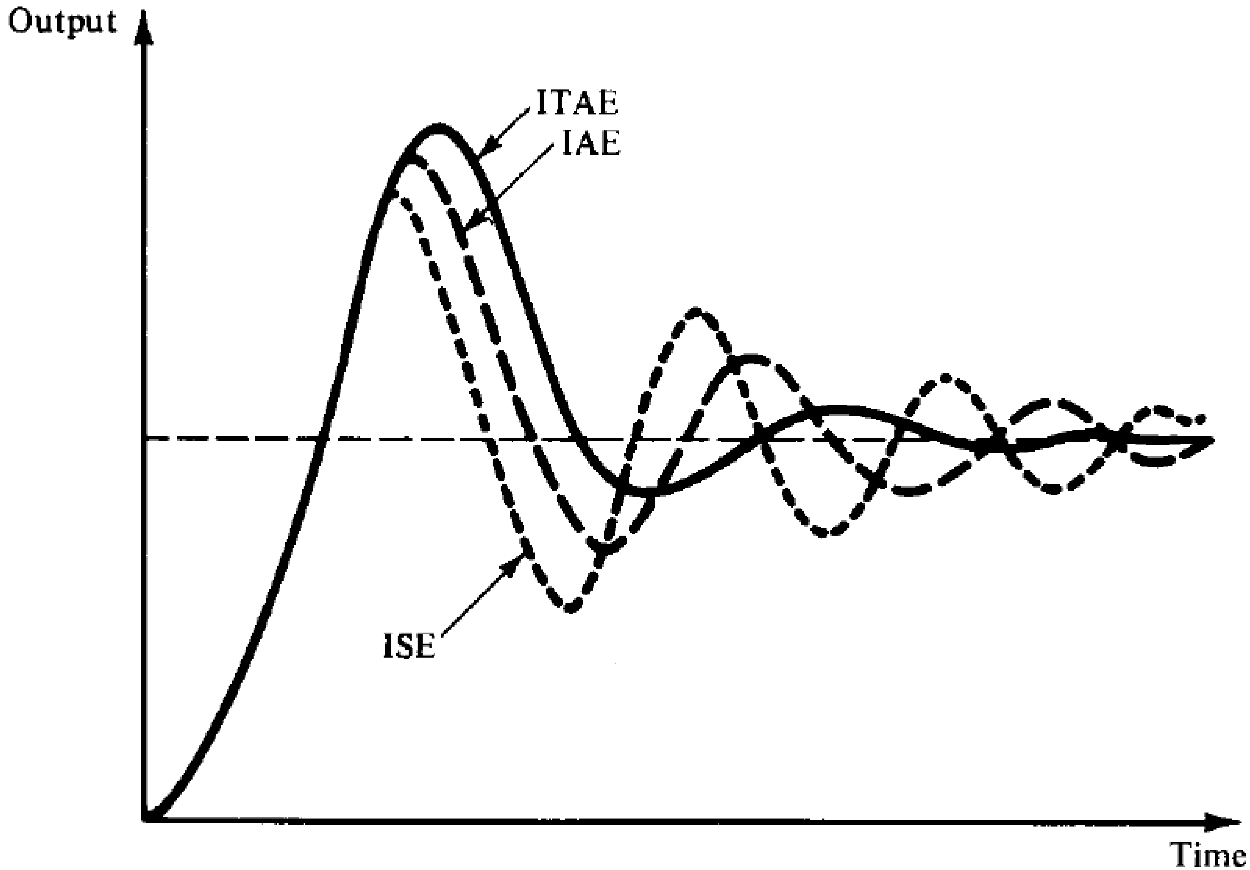
$$\underset{K_c,\tau_I,\tau_D}{\mathrm{Min}} \left\{ ITAE \right\}$$

Il criterio **ISE** è indicato per sopprimere ampi errori ma trascura gli errori piccoli.

Il criterio **IAE** è indicato per sopprimere errori di uguale ordine di grandezza.

Il criterio **ITAE** pesa nel tempo gli errori e quindi per tempi elevati anche i piccoli errori assumono un peso non trascurabile nella successiva minimizzazione dell'indice di prestazione.

Indici di prestazione integrali



Tratto da: Stephanopoulos, 1984

Indici di prestazione integrali

N.B.: il problema di minimizzazione degli indici ISE, IAE, ITAE dipende dal fatto che si stia risolvendo un problema di servomeccanismo o in alternativa di regolazione. Nel caso di servomeccanismo il problema numerico dipende dalla traiettoria temporale del setpoint (*e.g.*, gradino, rampa, impulso, …). Nel caso di regolazione il problema numerico dipende dalla tipologia ed ampiezza del disturbo.

N.B.: nel caso di sistemi del primo ordine con controllori puramente proporzionali è nota la presenza di offset. Ciò significa che il criterio ITAE porta a valori dell’integrale elevati e potenzialmente infiniti. In questo caso il problema matematico è di difficile soluzione anche se si può anticipare che la procedura di minimizzazione tenderà a innalzare al massimo il valore della costante proporzionale, K_c, fino al limite ammesso dall’utente, per poter così ridurre al massimo l’offset del sistema.

Sintonizzazione delle costanti del controllore

Determinazione delle costanti del controllore

Una volta definita la struttura del sistema di controllo, esistono tre approcci generali per la sintonizzazione delle costanti del controllore:

- utilizzare **criteri semplici** (indici di prestazione puntuali) quali il decay-ratio o il settling time o il massimo errore commesso (*e.g.*, overshoot). Di solito questo approccio fornisce più soluzioni. Per ridurre la molteplicità delle soluzioni occorrerà fornire ulteriori criteri di valutazione e selezione.
- utilizzare **indici di prestazione integrali** (*i.e.* ISE, IAE, ITAE). Questo approccio è in genere pesante in termini di tempo di calcolo e si basa pesantemente sul modello numerico del sistema. Se, invece, lo si applica direttamente sul processo reale è assai dispendioso in termini di risorse e tempi di attuazione.
- utilizzare **regole semiempiriche** la cui applicabilità sia stata dimostrata in pratica.

Il metodo di Cohen-Coon

Il metodo empirico più rinomato per la sintesi dei parametri di un controllore in retroazione è detto: **metodo della curva di reazione del processo** (process reaction curve method) ed è stato proposto da Cohen e Coon nel 1953.

Si procede come segue:

1. si considera il sistema ad **anello aperto** e si assegna un **disturbo a gradino** di ampiezza A alla **variabile manipolata** $c(t)$;
2. si registra nel tempo il valore della **variabile controllata** $y_m(t)$ ad **anello aperto**
3. la curva $y_m(t)$ è definita: **curva di reazione del processo**.

N.B.: in realtà il disturbo sulla variabile manipolata passa anche attraverso l'elemento finale di attuazione dell'azione di controllo che è ad esempio rappresentato dalla valvola di attuazione dell'azione di controllo. Analogamente la variabile di processo y è in realtà quella misurata y_m.

Il metodo di Cohen-Coon

Cohen e Coon osservarono che per la maggior parte dei sistemi la risposta ad un gradino sulla variabile manipolata ad anello aperto corrisponde ad una **sigmoide**, adeguatamente descritta da un sistema del primo ordine con tempo di ritardo:

$$y(t) = A \cdot K \cdot \text{Heaviside}(t - t_d)\left(1 - \exp\left(-\frac{t - t_d}{\tau}\right)\right)$$

dove: $\text{Heaviside}(x) = \Theta(x)\begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < 0 \\ 1 & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$

si noti che la funzione di Heaviside è l'integrale della delta di Dirac: $\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt$

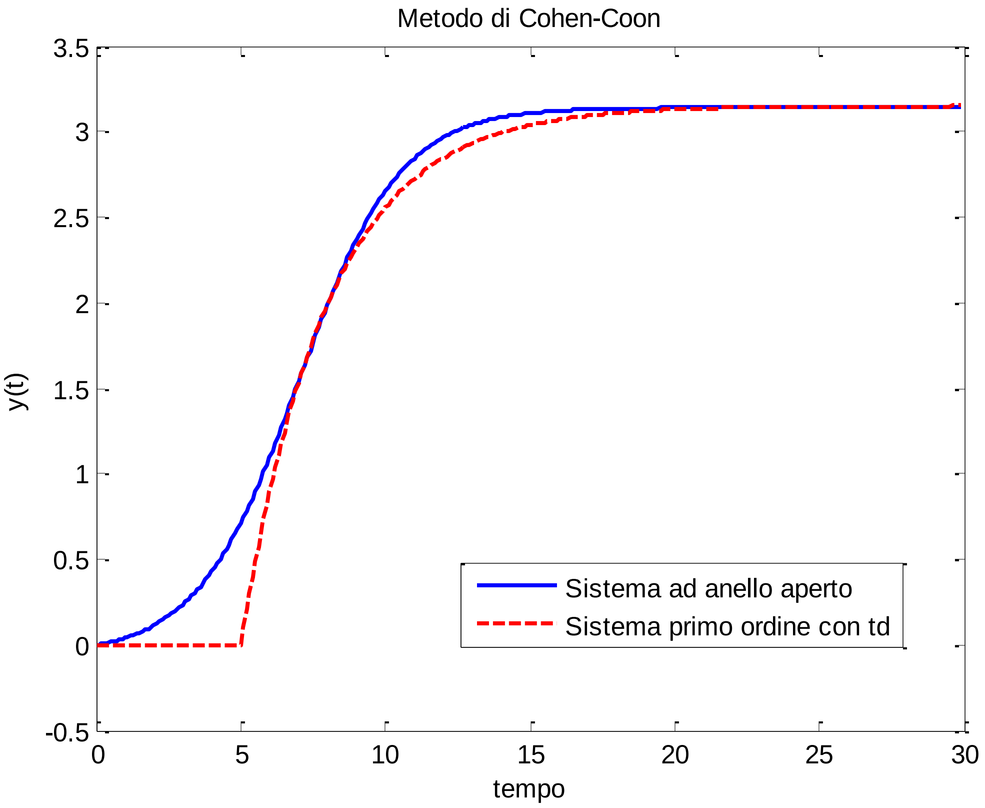
con: $\delta(x) = 0 \quad per \quad x \neq 0 \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$

Nell'origine la funzione di Heaviside assume a seconda degli autori che la definiscono i seguenti valori:

$$\Theta(0) = 0,\ \Theta(0) = 1,\ \Theta(0) = 1/2$$

Il metodo di Cohen-Coon

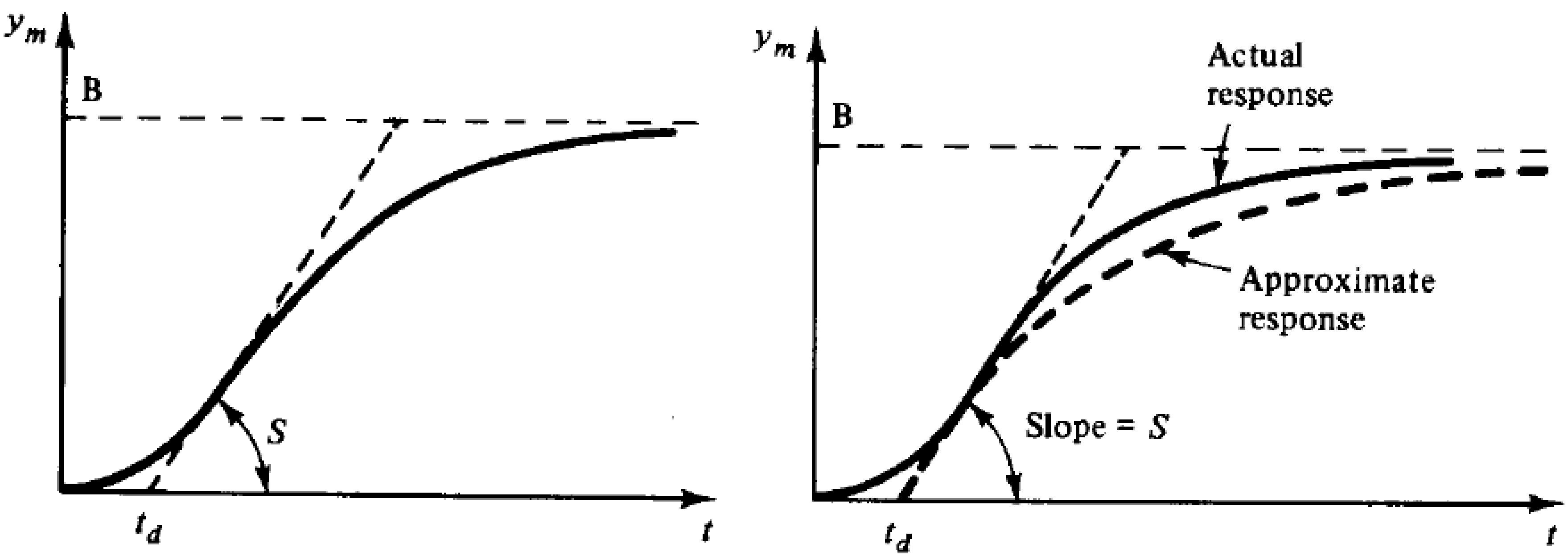
La tipica risposta a sigmoide di un sistema, dotato di una certa inerzia, ad un gradino della variabile manipolata (curva blu) può essere approssimata da un sistema del primo ordine con tempo di ritardo (curva rossa):



Il metodo di Cohen-Coon

Il sistema del primo ordine con tempo di ritardo è caratterizzato da tre costanti facilmente calcolabili ed inferenziabili anche graficamente:

- K **guadagno statico** = output a stazionario / input a stazionario = B/A
- τ **costante di tempo** = B/S dove S è la pendenza della tangente inflessionale della curva sigmoide del processo originale ad anello aperto
- t_d **tempo di ritardo** = è il tempo richiesto dal sistema per rispondere



Tratto da: Stephanopoulos, 1984

Il metodo di Cohen-Coon

1. Partendo dal modello approssimato del primo ordine con tempo di ritardo:

$$y(t) = A \cdot K \cdot \text{Heaviside}(t - t_d)\left(1 - \exp\left(-\frac{t - t_d}{\tau}\right)\right)$$

2. Cohen e Coon calcolano le tre costanti del modello approssimato: K, τ, t_d.

3. Basandosi sugli indici di prestazione:
    1. **one-quarter decay ratio**
    2. **offset minimo**
    3. **minimizzazione dell'integrale dell'errore quadratico, ISE**

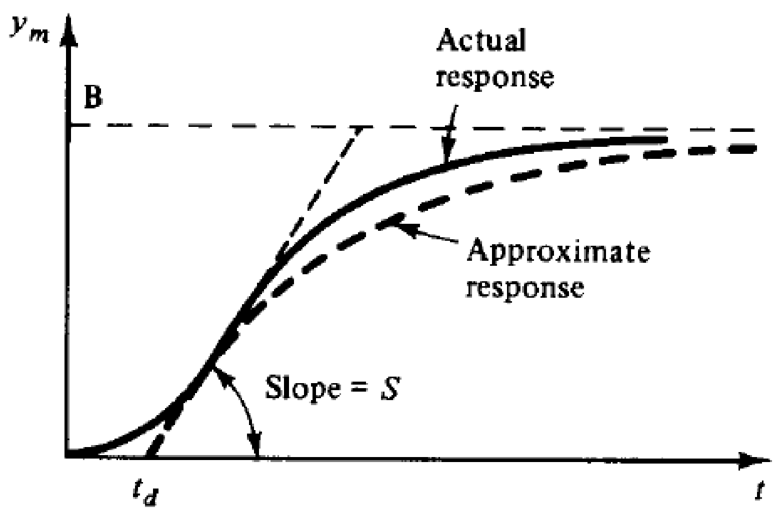
4. Giungono alla determinazione delle costanti dei controllori: P, PI, PID.

Il metodo di Cohen-Coon

Riassumendo, il percorso seguito da Cohen e Coon per la determinazione delle costanti dei controllori P, PI e PID a partire dalla risposta del sistema è il seguente:

$$\text{noto } A \rightarrow \underbrace{B, S, t_d}_{} \rightarrow K = \frac{B}{A}, \tau = \frac{B}{S}, t_d \rightarrow K_c, \tau_I, \tau_D$$

determinate anche graficamente



Il metodo di Cohen-Coon

Controllore P:

$$K_c = \frac{1}{K}\frac{\tau}{t_d}\left(1 + \frac{t_d}{3\tau}\right)$$

Controllore PI:

$$K_c = \frac{1}{K}\frac{\tau}{t_d}\left(0.9 + \frac{t_d}{12\tau}\right)$$

$$\tau_I = t_d \frac{30 + 3t_d/\tau}{9 + 20t_d/\tau}$$

Controllore PID:

$$K_c = \frac{1}{K}\frac{\tau}{t_d}\left(\frac{4}{3} + \frac{t_d}{4\tau}\right)$$

$$\tau_I = t_d \frac{32 + 6t_d/\tau}{13 + 8t_d/\tau}$$

$$\tau_D = t_d \frac{4}{11 + 2t_d/\tau}$$

Il metodo di Cohen-Coon

Il metodo di Cohen e Coon si basa sull'assunzione che il sistema del primo ordine con tempo di ritardo sia una buona approssimazione della risposta del sistema reale disturbato ad anello aperto.

È viceversa possibile che l'approssimazione sia debole. In questo caso le costanti di Cohen e Coon sono solo delle approssimazioni di quelle effettivamente efficaci.

Spesso i processi chimici reali sono rappresentati da sistemi del primo ordine o multicapacitivi la cui risposta ad anello aperto è per lo più sovrasmorzata (quindi non oscillante) e quindi assimilabile ad una curva sigmoide.

N.B.: la costante K_c del controllore P è maggiore di quella del controllore PI. Ciò è dovuto al fatto che il termine integrale rende il sistema più sensibile.

N.B.: la costante K_c del controllore PID è maggiore di quella dei controllori P e PI. Ciò è dovuto all'azione stabilizzatrice del termine derivativo.

Bibliografia

- Cohen G.H., G.A. Coon, “Theoretical Considerations of Retarded Control”, Trans. ASME, 75, 827, (1953)
- Luyben, W., Tyréus B. & Luyben, M. “Plantwide Process Control”, McGraw-Hill, New York, (1998)
- Stephanopoulos G., “Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice”, Prentice-Hall, Englewood Cliff, (1984)