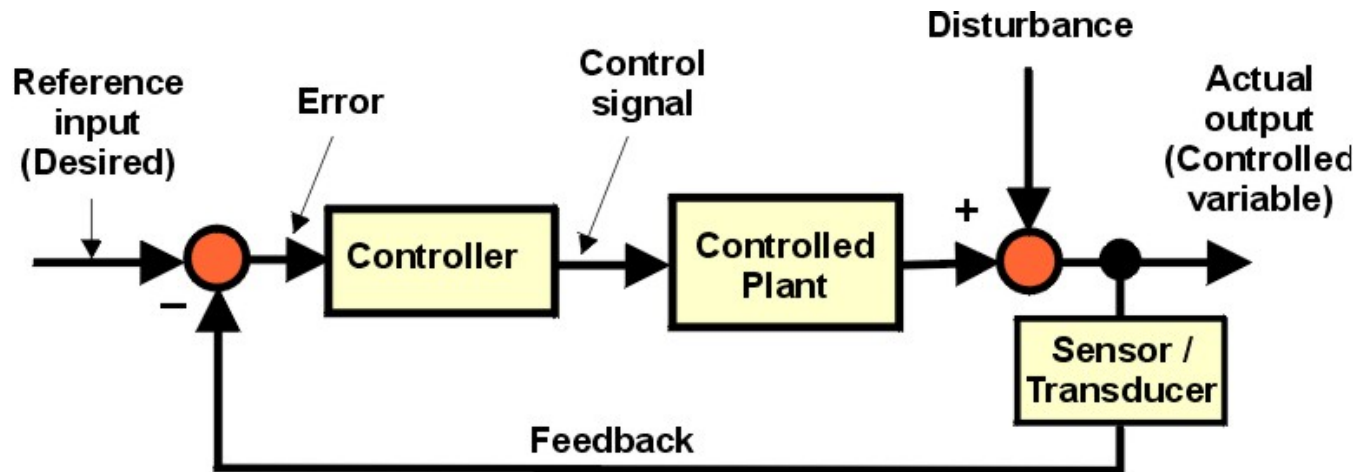


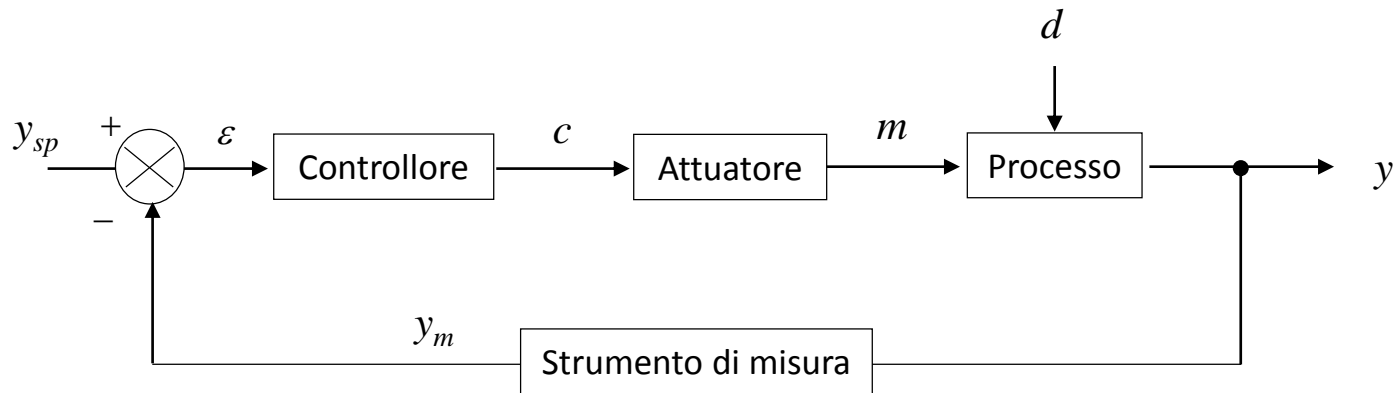
# Dinamica di sistemi controllati in retroazione



# Tipologie di problemi di controllo

Esistono due tipologie distinte di problemi di controllo:

- il problema di servomeccanismo (**servo problem**)
- il problema di regolazione (**regulator problem**)



Il **problema di servomeccanismo** è caratterizzato da un disturbo  $d$  costante (che non cambia) mentre il setpoint della variabile controllata  $y_{sp}$  viene modificato.

Il **problema di regolazione** vede invece una costanza del valore di setpoint della variabile controllata  $y_{sp}$  mentre il disturbo  $d$  cambia.

# Introduzione al controllo in retroazione

In genere i disturbi  $d$  cambiano in modo imprevisto e l'obiettivo del sistema di controllo è mantenere la risposta del processo  $y$  ad un valore prestabilito  $y_{sp}$ .

Un sistema di controllo in retroazione funziona nel seguente modo:

- misura il valore  $y_m$  della variabile di output  $y$  (e.g., pressione, livello, temperatura, composizione) tramite un opportuno strumento di misura;
- confronta il valore  $y_m$  con quello desiderato  $y_{sp}$  (i.e. setpoint) e quantifica l'errore  $\mathcal{E} = y_{sp} - y_m$ ;
- l'errore  $\mathcal{E}$  rappresenta il dato di input per il sistema di controllo, il quale propone come output il valore della variabile manipolata  $m$ ;
- il valore  $m$  viene fornito all'elemento finale della catena di controllo (solitamente una valvola) che attua l'azione di controllo sul processo.



# Controllore proporzionale



# Effetti del controllore P sul sistema

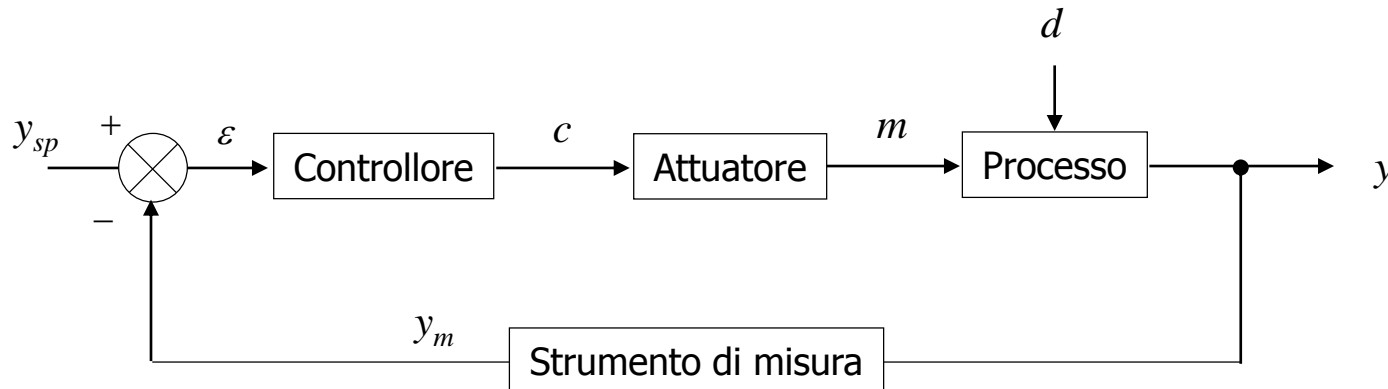
Si rammenta che un controllore proporzionale è caratterizzato dall'azione di controllo:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + c_s$$

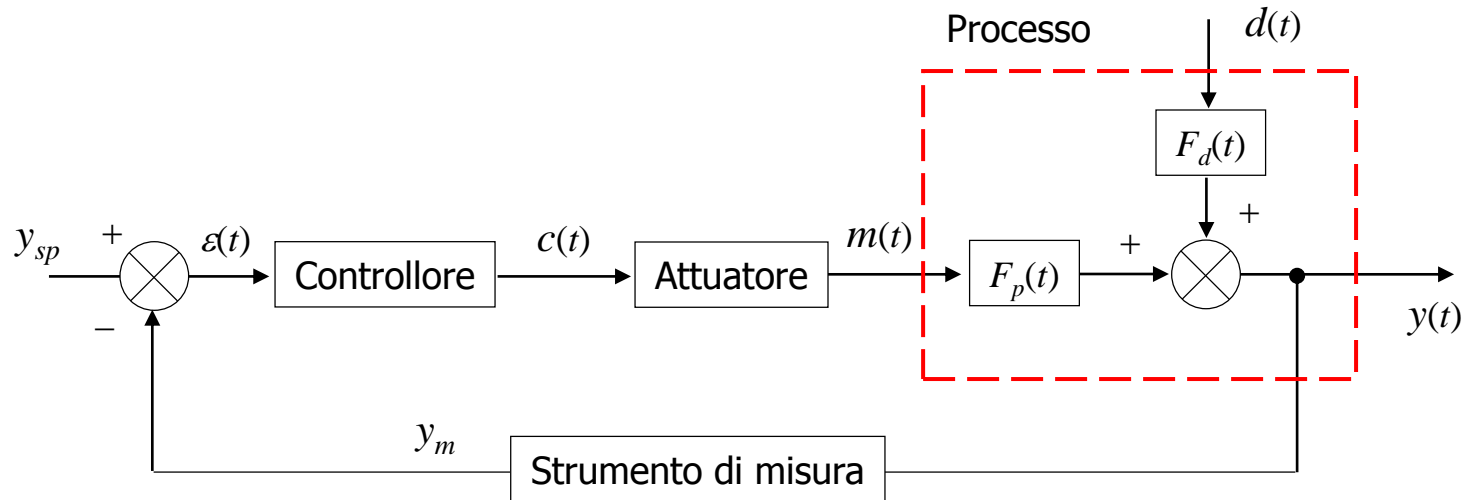
Ove:

- $K_c$  è il guadagno proporzionale del controllore,
- $c_s$  è il segnale di bias del controllore.

Più  $K_c$  è elevato maggiore è la sensibilità del controllore proporzionale rispetto all'errore  $\varepsilon$  rilevato.



# Effetti del controllore P sul sistema



Per **sistemi** del **primo ordine**:

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p m + K_d d$$

ad anello chiuso (closed loop) si hanno le seguenti costanti:

$$\tau'_p = \frac{\tau_p}{1 + K_p K_c} \quad K'_p = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} \quad K'_d = \frac{K_d}{1 + K_p K_c}$$

Dove  $K'_p$  e  $K'_d$  sono detti **guadagni statici ad anello chiuso**.

# Effetti del controllore P sul sistema

Dalle equazioni precedenti, relative alle costanti del sistema ad anello chiuso con controllore proporzionale, è possibile affermare che:

- un sistema del primo ordine resta del primo ordine;
- la costante di tempo ad anello chiuso è più piccola del corrispondente sistema ad anello aperto, quindi il sistema controllato è più responsivo di quello originale sia a modifiche di setpoint che di carico (*i.e.* disturbo);
- il guadagno statico risulta diminuito.

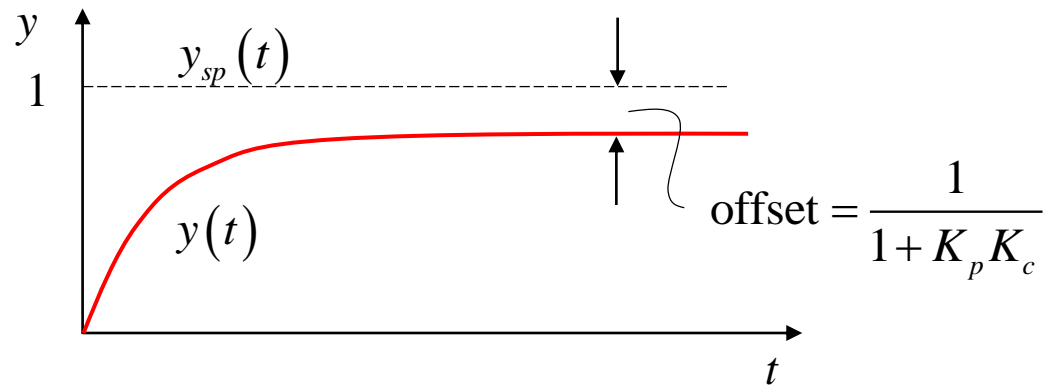
È possibile dimostrare analiticamente che la risposta dinamica di un sistema del primo ordine ad anello chiuso con controllore proporzionale rispetto ad un gradino unitario del setpoint (*i.e.* **servo problem**) è pari a:

$$y(t) = K'_p \left(1 - e^{-t/\tau'_p}\right) = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} \left(1 - e^{-t/\frac{\tau_p}{1+K_p K_c}}\right) = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} \left(1 - e^{-t(1+K_p K_c)/\tau_p}\right)$$



# Effetti del controllore P sul sistema

Dando un disturbo unitario a gradino sul **set-point** la risposta del sistema ad anello chiuso risulta essere:



L'offset è definito come la distanza asintotica del sistema dal setpoint:

$$\text{offset} = y_{sp} - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 - K'_p = 1 - \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} = \frac{1}{1 + K_p K_c}$$

Si noti come l'offset diminuisca con il crescere della costante proporzionale del controllore. Vale infatti:

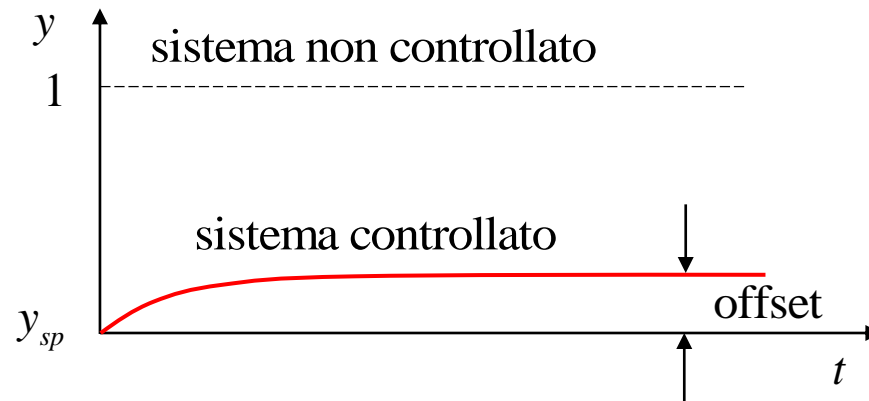
$$\lim_{K_c \rightarrow \infty} \text{offset} = \lim_{K_c \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + K_p K_c} = 0$$



# Effetti del controllore P sul sistema

Analogamente, per un gradino unitario sul termine di carico (*i.e.* disturbo) si ha un cosiddetto **regulator problem** che conduce ad una risposta dinamica del sistema del primo ordine con controllore proporzionale:

$$y(t) = K'_d \left(1 - e^{-t/\tau'_p}\right) = \frac{K_d}{1 + K_p K_c} \left(1 - e^{-t/\frac{\tau_p}{1 + K_p K_c}}\right) = \frac{K_d}{1 + K_p K_c} \left(1 - e^{-t(1 + K_p K_c)/\tau_p}\right)$$

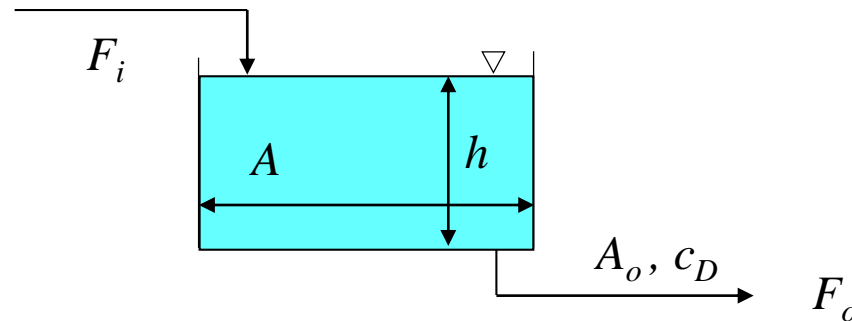


$$\text{offset} = y_{sp} - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{sp} - \lim_{t \rightarrow \infty} K'_d \left(1 - e^{-t/\tau'_p}\right) = 0 - K'_d = -\frac{K_d}{1 + K_p K_c}$$

Anche in questo caso:  $\lim_{K_c \rightarrow \infty} \text{offset} = \lim_{K_c \rightarrow \infty} -\frac{K_d}{1 + K_p K_c} = 0$

# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Si desidera affrontare il caso studio relativo al controllo proporzionale del livello di un serbatoio:



Ad anello aperto la dinamica del sistema è data da:

$$A \frac{dh}{dt} = F_i - F_o = F_i - A_o c_D \sqrt{2gh}$$

In condizioni stazionarie:

$$\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow F_i = F_o \Rightarrow F_i = A_o c_D \sqrt{2gh_{ss}}$$

Da ciò segue che:

$$h_{ss} = \frac{1}{2g} \left( \frac{F_i}{A_o c_D} \right)^2$$

# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Occorre notare come l'altezza di liquido nel serbatoio in condizioni stazionarie sia funzione non solo della portata entrante ma anche delle caratteristiche del condotto di scarico:  $A_o$ ,  $c_D$ . Quindi modificando  $A_o$ ,  $c_D$  si modifica anche il livello nel serbatoio pur in condizioni stazionarie.

Introduciamo ora il controllore proporzionale, P.

Occorre identificare le variabili controllate e manipolate:

- Variabile controllata: livello del serbatoio,  $h$
- Variabile manipolata: portata uscente,  $F_o$

Alla variabile controllata occorre *affiancare* anche il valore di consegna, ossia il *setpoint*:  $h_{sp}$ .

È opportuno sottolineare che **nella realtà** il sistema di controllo sarà più articolato in quanto la portata uscente  $F_o$  non può essere manipolata direttamente bensì occorrerà modulare l'apertura/chiusura di una valvola che modificherà l'effettiva portata uscente.



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

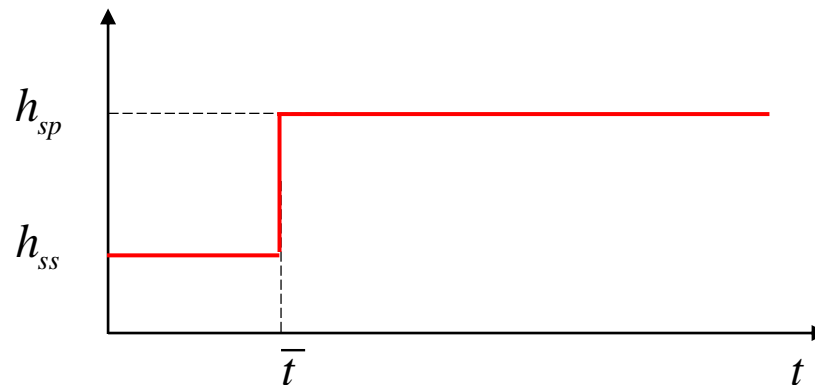
La legge di controllo è data dalla seguente equazione che descrive la dinamica della variabile manipolata in funzione dell'errore sulla variabile controllata (misurata):

$$c(t) = c_s + K_c \varepsilon(t) \quad \varepsilon(t) = y_{sp} - y_m(t)$$

Nel caso del serbatoio si ha:

$$F_o(t) = F_{o,ss} + K_c (h_{sp} - h(t)) = F_i + K_c (h_{sp} - h(t))$$

Consideriamo ora il problema di servomeccanismo (**servo problem**) ove ad un certo istante si ha un cambiamento a gradino del setpoint di livello da  $h_{ss}$  a  $h_{sp}$ .



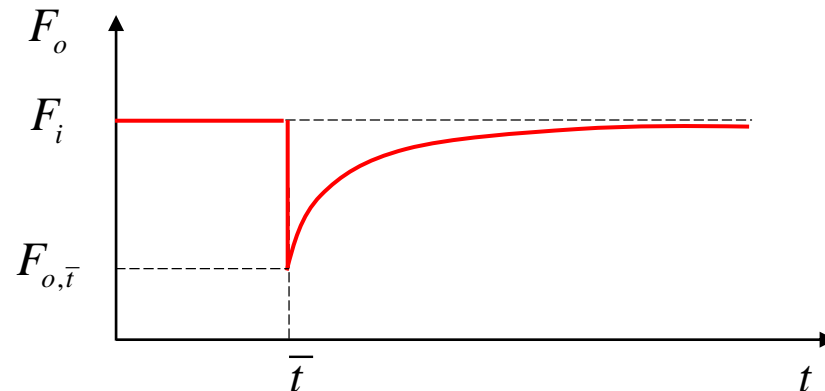
# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Il controllore P opera per determinare dinamicamente il valore di  $F_o$  che permetta di passare da  $h_{ss}$  a  $h_{sp}$ .

Ad esempio in  $t = \bar{t}$  la prima azione di controllo assume il valore:

$$F_o(\bar{t}) = F_i + K_c (h_{sp} - h_{ss}) = F_i + K_c \left( h_{sp} - \frac{1}{2g} \left( \frac{F_i}{A_o c_D} \right)^2 \right)$$

A livello puramente qualitativo ci si può attendere la seguente azione di controllo sulla variabile manipolata:

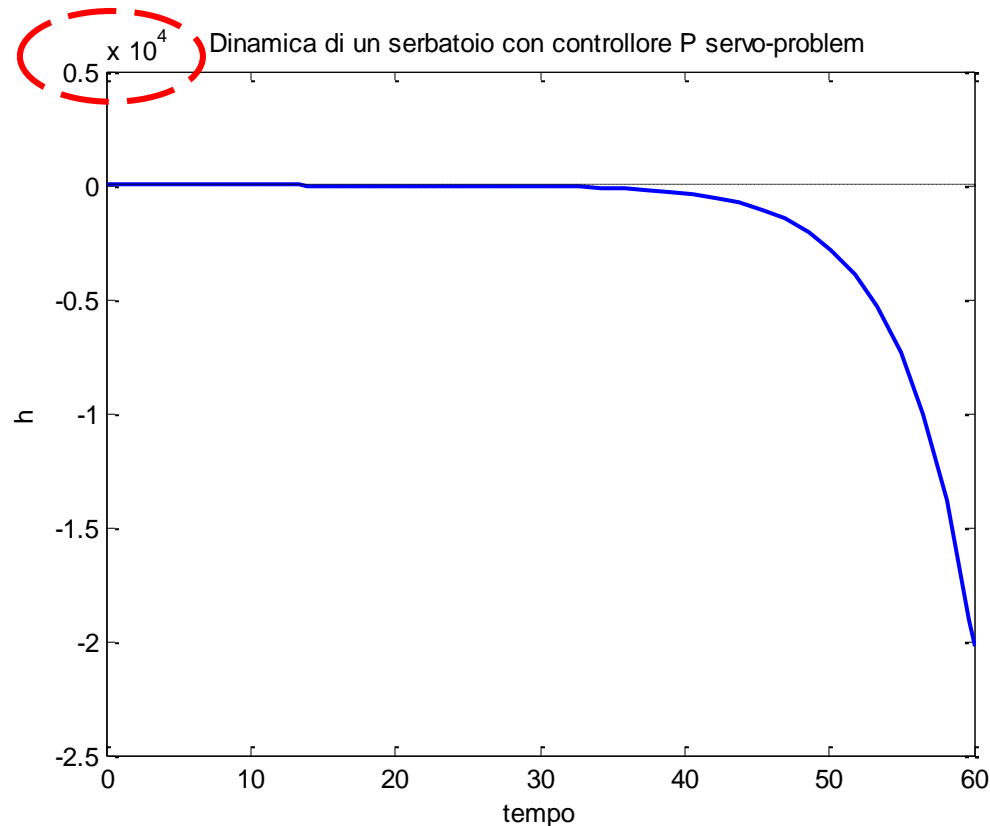


**N.B.:**

$$F_{o,\bar{t}} = F_{o,\bar{t}}(K_c, \dots)$$

# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Proviamo a risolvere numericamente il problema di servomeccanismo ove al tempo  $t = 10$  il setpoint assume un valore doppio rispetto alla condizione di stato stazionario ( $h_{SP} = 2 h_{SS}$ ). Si ottiene il seguente risultato:



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Occorre notare che i valori riportati sull'asse delle ordinate sono moltiplicati per un fattore 10,000.

Il cambio di setpoint appare piatto in quanto schiacciato dalla scala del diagramma.


La variabile controllata non approssima il nuovo setpoint, anzi al contrario si allontana da esso e diventa in breve tempo negativa.

**Dov'è l'errore?**



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

```
A = 5.;      % area serbatoio [m2]
cD = 0.8;    % discharge coefficient [-]
do = 0.15;   % diametro condotto di uscita [m]
Ao = pi * do^2 / 4.;    % area condotto di uscita
Fi = 0.1;    % portata entrante [m3/s]
Kc = 1.;     % costante proporzionale del controllore [m2/s]
hSS = (Fi/(Ao * cD))^2 / (2. * g); % condizioni di stazionarietà
FoSS = Fi;   % condizione steady-state variabile manipolata
hSP = 2. * hSS; % condizione di setpoint
tCambioSP = 10.; % tempo al quale avviene il cambio di setpoint [s]
```



```
function dy = Sisdif(t,y,A,Ao,g,Fi,hSP,FoSS,cD,Kc,tCambioSP)
    h = y(1);
    if t < tCambioSP
        Fo = FoSS; % condizione di steady-state
    else
        epsi = hSP - h; % cambio di setpoint
        Fo = FoSS + Kc * epsi;
    end
    dy(1) = (Fi - Fo) / A;
end
```





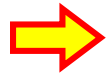
# Caso studio: controllo P di un serbatoio

È possibile dire qualcosa circa il **segno della costante proporzionale**  $K_c$  ?

Affinché il livello salga occorre che la  $F_o$  diminuisca (a parità di  $F_i$ ).

Di conseguenza, la variabile controllata e quella manipolata sono controverse.

Perciò  $K_c < 0$ .



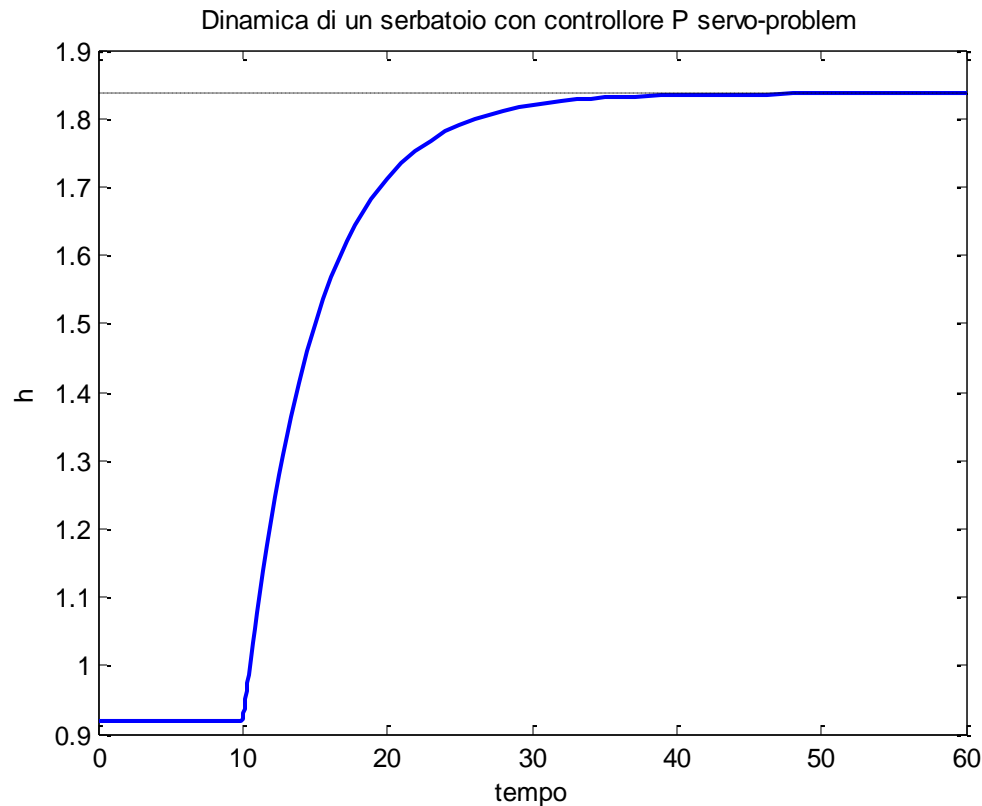
```
Kc = -1.;    % costante proporzionale del controllore [m2/s]
```

```
function dy = Sisdif(t,y,A,Ao,g,Fi,hSP,FoSS,cD,Kc,tCambioSP)
    h = y(1);
    if t < tCambioSP
        Fo = FoSS;    % condizione di steady-state
    else
        epsi = hSP - h;    % cambio di setpoint
        Fo = FoSS + Kc * epsi;
    end
    dy(1) = (Fi - Fo) / A;
end
```



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Fornendo al sistema di controllo il segno corretto della costante proporzionale il processo risponde secondo quanto atteso, raggiungendo il nuovo valore di setpoint:



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

È quindi possibile affermare di aver concluso l'esercizio circa il problema di servomeccanismo?

**È tutto OK?**

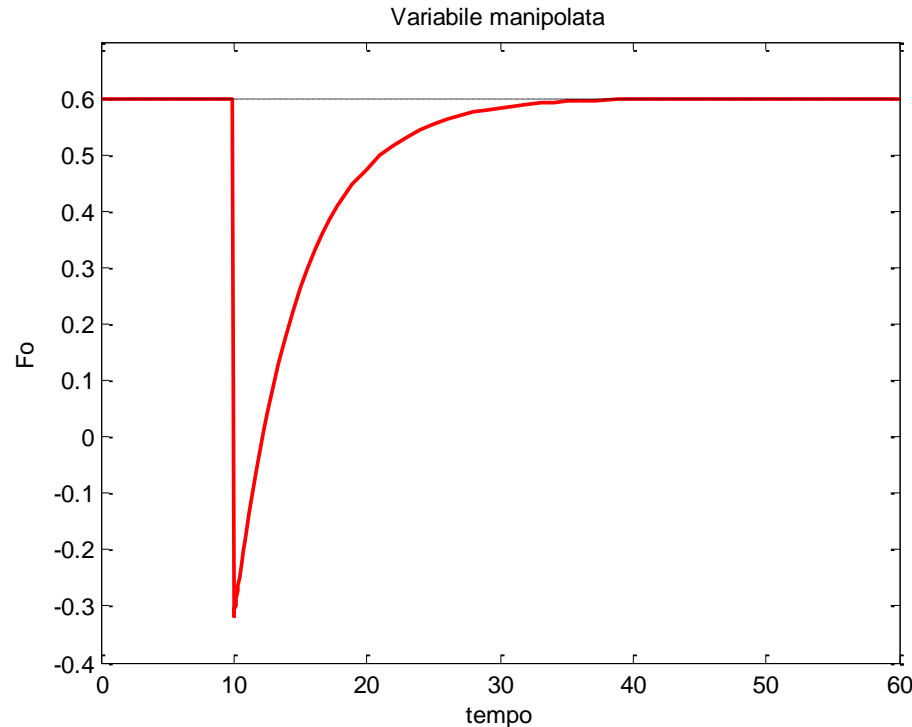


In campo ingegneristico, occorre tenere sotto controllo (nel senso di monitorare) tutte le variabili, grandezze, quantità, dipendenze funzionali che caratterizzano il problema da risolvere. A maggior ragione quando si programma al calcolatore.

Nel caso specifico si è osservato l'andamento dinamico della sola variabile controllata,  $h$ , ma non della corrispondente variabile manipolata:  $F_o$ .

# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Ecco il diagramma temporale della variabile manipolata:  $F_o$  :



L'evoluzione dinamica di  $F_o$  segue perfettamente l'andamento qualitativo previsto in precedenza, ma è possibile osservare nel corso del transitorio **valori negativi** di  $F_o$ . Ciò **non ha senso fisico** anche se a livello matematico è *logico* che succeda così al fine di raggiungere l'obiettivo fissato dal sistema di controllo.

# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Occorre quindi introdurre dei **limiti fisici** sulla **variabile manipolata** che permettano di **mantenere fisico e quindi fattibile il problema** e la sua realizzazione.

La variabile manipolata deve appartenere ad un intervallo di fattibilità:

$$m^{\min} \leq m(t) \leq m^{\max}$$

e nello specifico:

$$F_o^{\min} \leq F_o(t) \leq F_o^{\max}$$

Per il serbatoio risulta ragionevole porre:

$$F_o^{\min} = 0$$

$$F_o^{\max} = \rho A_o c_D \sqrt{2gh}$$

**N.B.:**  $F_o^{\max}$  cambia nel tempo in funzione del valore attuale di  $h$  ( $h(t)$ ).



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

A livello programmatico il sistema differenziale descrivente la dinamica del processo controllato assume la forma:

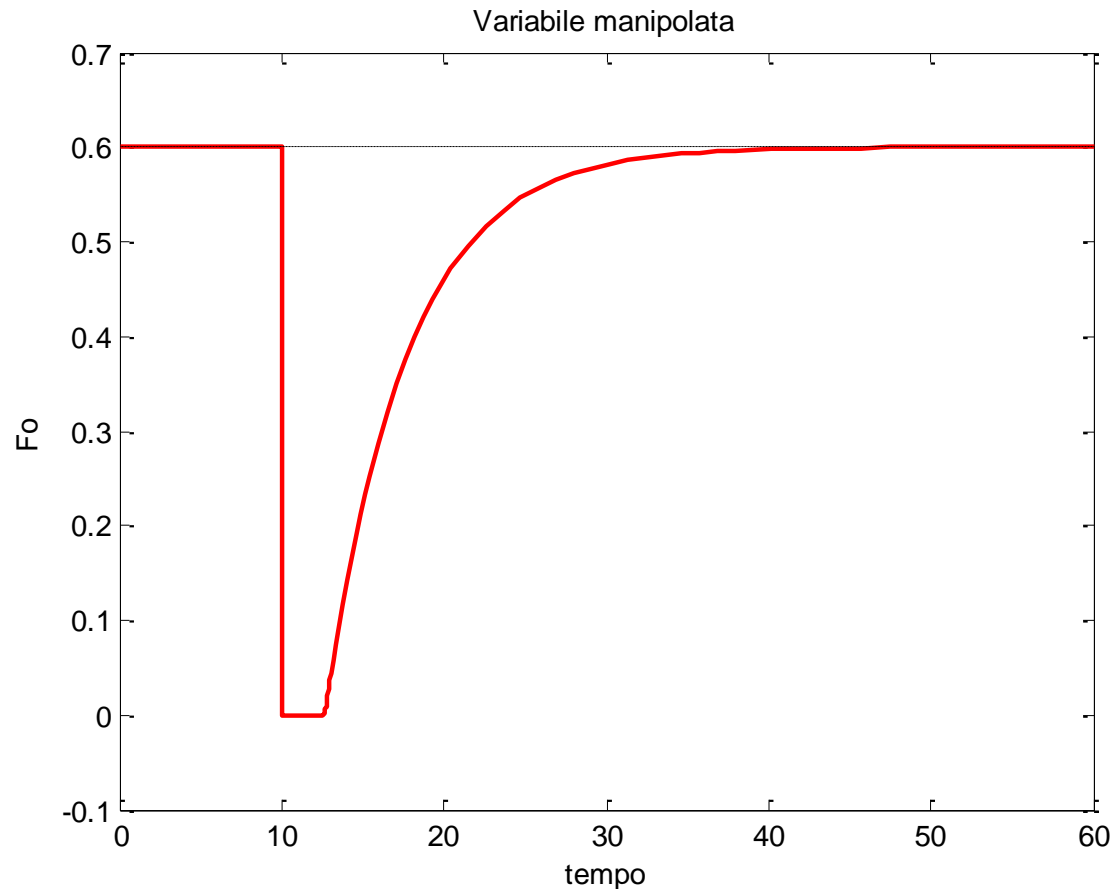
```
function dy = Sisdif(t,y,A,Ao,g,Fi,hSP,FoSS,cD,Kc,tCambioSP)
    h = y(1);
    if t < tCambioSP
        % condizione di steady-state
        Fo = FoSS;
    else
        % cambio di setpoint
        epsi = hSP - h;
        Fo = FoSS + Kc * epsi;
        FoMin = 0.;
        FoMax = Ao * cD * sqrt(2. * g * h);

        Fo = max(Fo, FoMin);
        Fo = min(Fo, FoMax);
    end
    dy(1) = (Fi - Fo) / A;
end
```



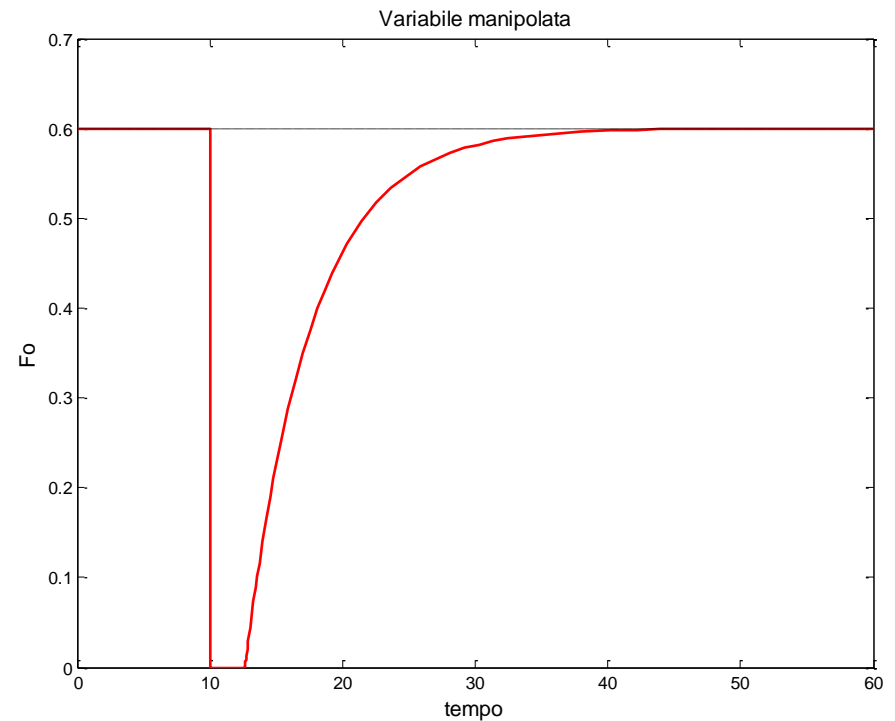
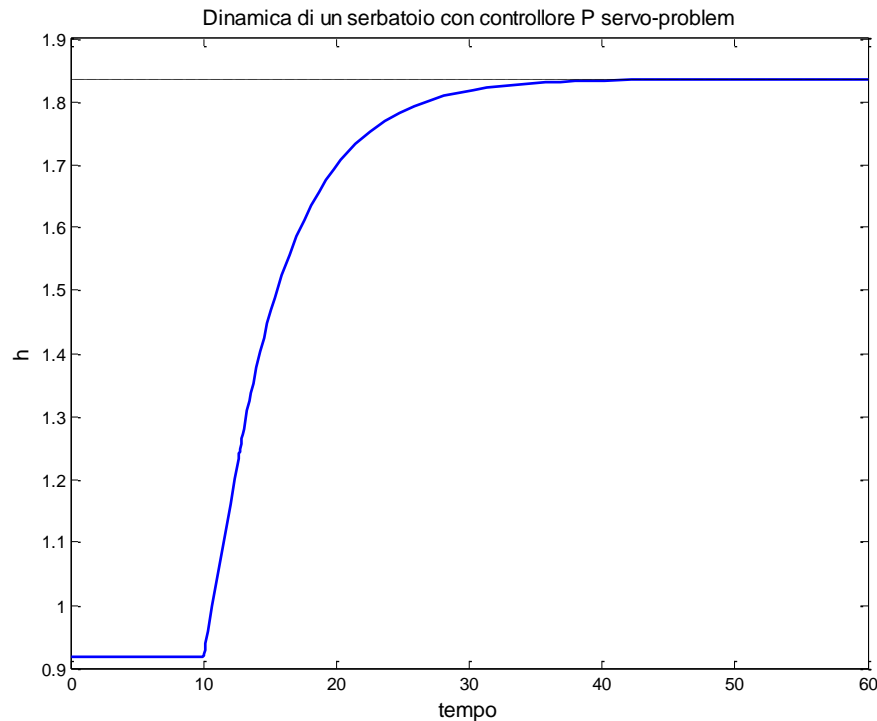
# Caso studio: controllo P di un serbatoio

E finalmente la variabile manipolata assume consistenza fisica lungo tutto l'intervallo temporale di controllo:



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Complessivamente, il sistema fisico controllato rappresentato sia dalla variabile controllata,  $h$ , che da quella manipolata,  $F_o$ , fornisce la risposta al problema di servomeccanismo come di seguito diagrammato:

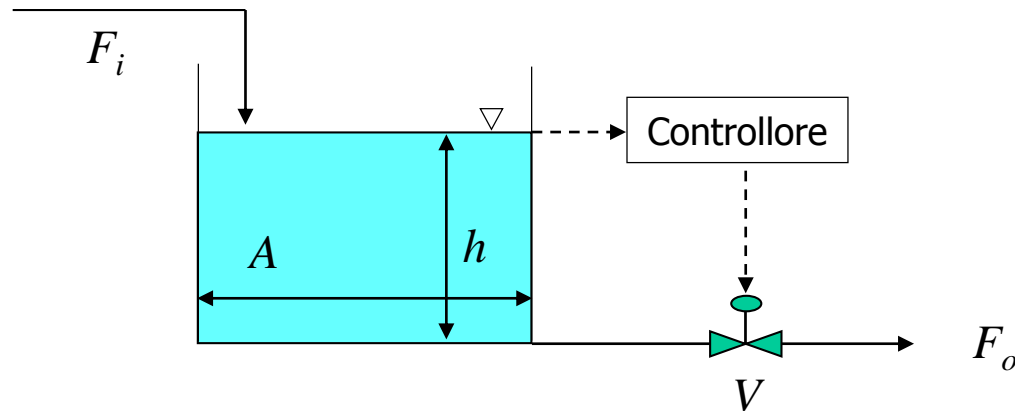




# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Con riferimento al diagramma di pagina precedente relativo alla variabile manipolata,  $F_o$ , è possibile osservare come la sua variazione **massima ed istantanea** al tempo  $t = 10$  sia **auspicabile ma non fisicamente realizzabile**.

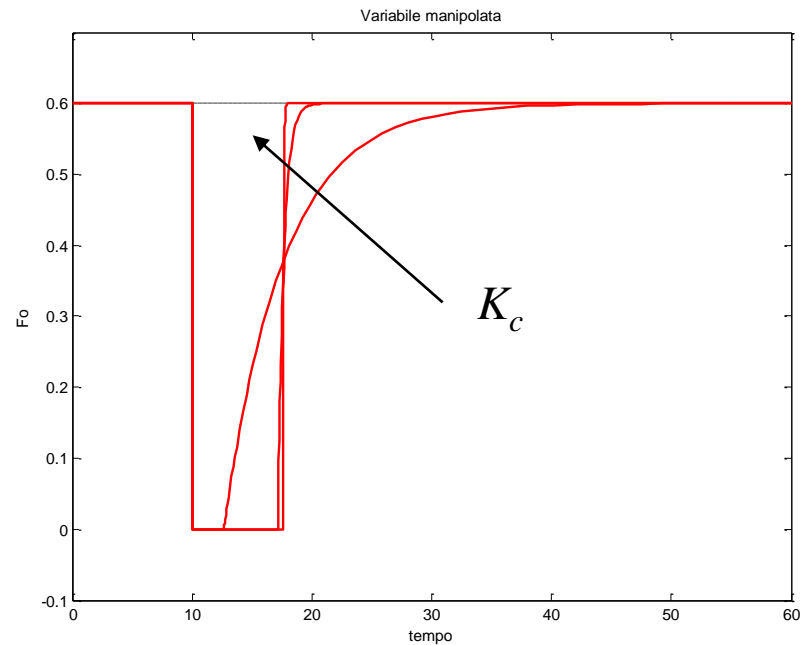
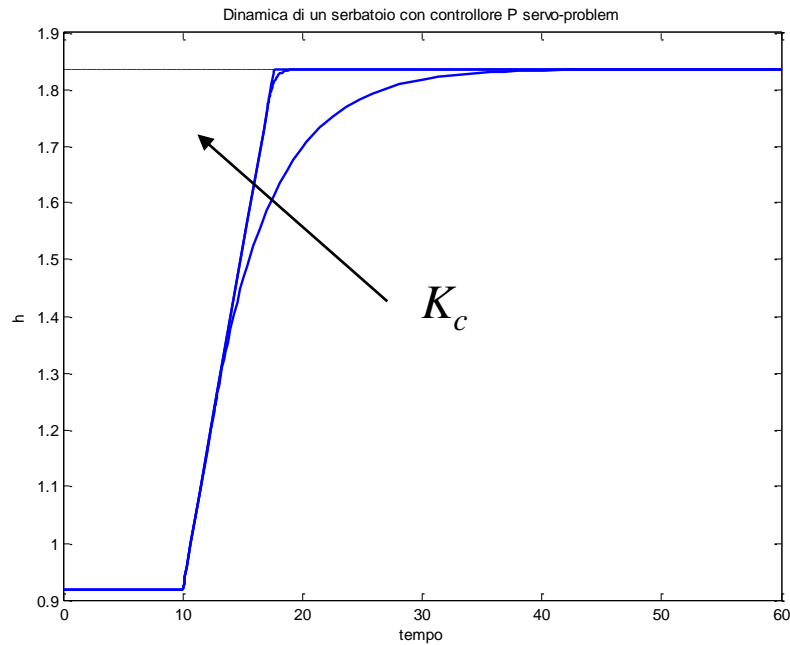
Nella realtà, infatti, occorre tenere conto delle inerzie del sistema e nello specifico della **dinamica di attuazione** della **variabile manipolata effettiva** che consiste nella apertura/chiusura della **valvola** che a sua volta modifica la portata uscente.



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Qual è il ruolo giocato dalla costante proporzionale sulla controllabilità del processo?

Ad esempio con  $K_c = -1, -10, -100$  si ha:



# Osservazioni sull'*offset* di sistemi del I ordine

In precedenza si è affermato che un sistema del primo ordine con controllore proporzionale sottoposto ad un problema di servomeccanismo (*i.e.* servo problem) mostra un *offset*.

I vari esempi di controllo proporzionale del serbatoio hanno viceversa mostrato l'assenza di *offset* finale.

Come ricomporre lo scollamento tra quanto affermato e quantificato e l'evidenza sperimentale del caso specifico?

**Regola:** il controllo in retroazione (*i.e.* feedback) basato su un controllore proporzionale presenta sempre un *offset* a transitorio esaurito.

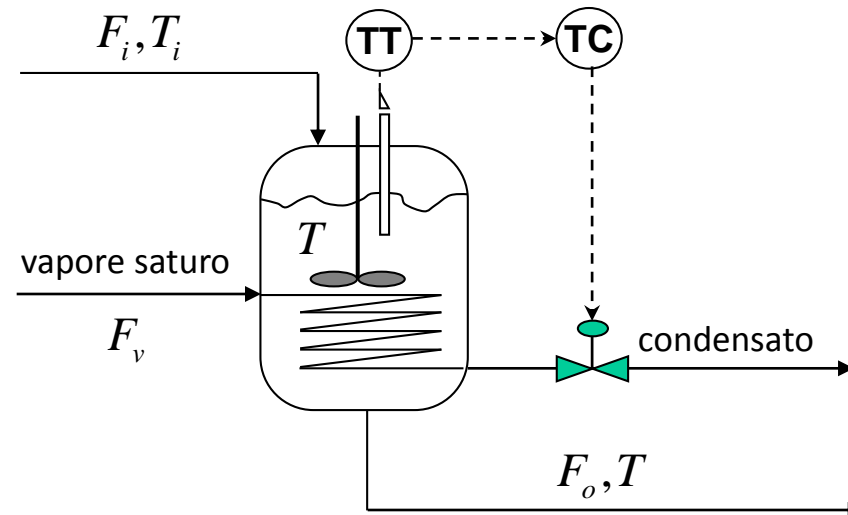
**Eccezione:** quando il sistema in questione è **puramente capacitivo** (o quando il sistema contiene un elemento puramente capacitivo) allora **non presenta un *offset* nel caso di servoregolazione** (*i.e.* servo problem). Al contrario nel caso di problema di regolazione (*i.e.* regulator problem) l'*offset* è presente.



# Controllo P su CSTR (servo problem)

Al fine di mostrare la presenza di offset per un sistema del primo ordine ad anello chiuso con un controllore proporzionale nel caso di cambio di setpoint (*i.e.* servo problem) si consideri il seguente caso studio:

Controllo **proporzionale** della temperatura di un serbatoio riscaldato e perfettamente miscelato con variazione di setpoint rispetto alla condizione di stazionarietà tramite alimentazione di vapore condensante in un serpentino ad immersione.



# Controllo P su CSTR (servo problem)

Variabile controllata:  $T$

Variabile manipolata:  $F_v$

Si ipotizza che il livello del serbatoio sia costante. Ciò porta ad un bilancio materiale costante ove  $F_o = F_i$  e  $dh/dt = 0$ .

Il bilancio di energia si riconduce ad un bilancio di energia interna che per correnti liquide può confondersi con quello entalpico (ove  $T^*$  è la temperatura di riferimento):

$$\rho c_p \frac{d}{dt} [V(T - T^*)] = \rho F_i c_p (T_i - T^*) + \Delta H_{ev} F_v - \rho F_o c_p (T - T^*)$$

che si riduce a:  $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_i - T) + \frac{\Delta H_{ev} F_v}{\rho V c_p}$

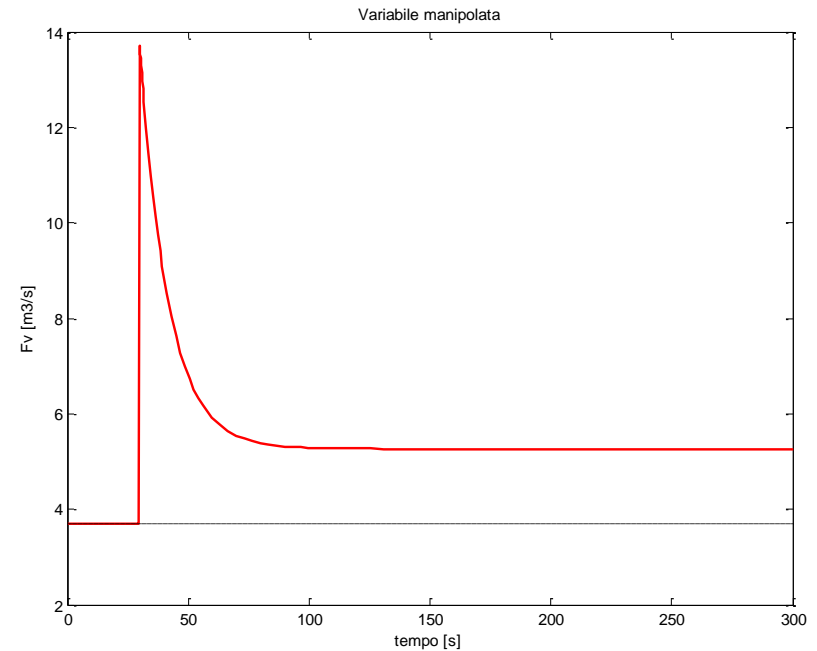
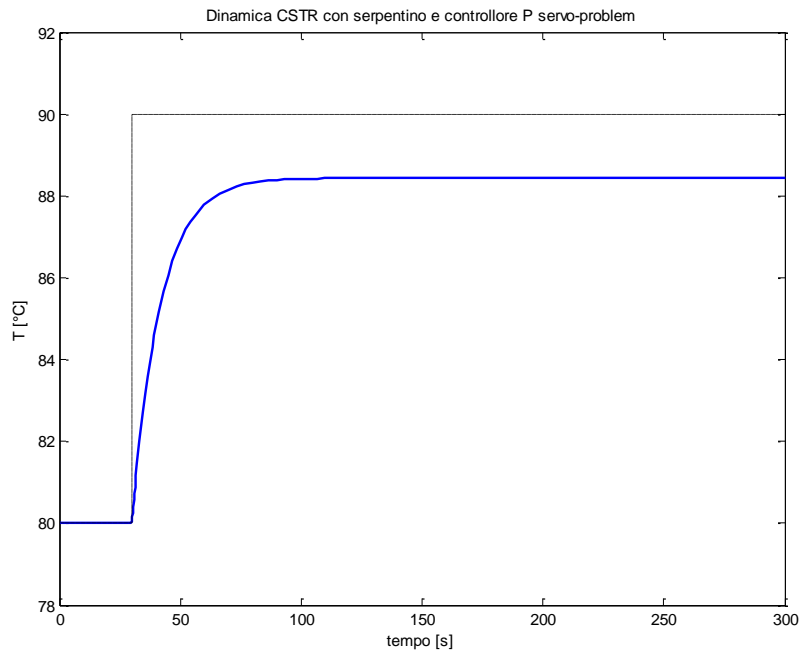
con:  $\tau = \frac{V}{F_i}$

**N.B.:** il segno della costante proporzionale,  $K_c$ , è positivo in quanto la temperatura del serbatoio  $T$  aumenta con l'aumentare della portata di vapore  $F_v$ .



# Controllo P su CSTR (servo problem)

Integrando il problema di servomeccanismo si ottiene:

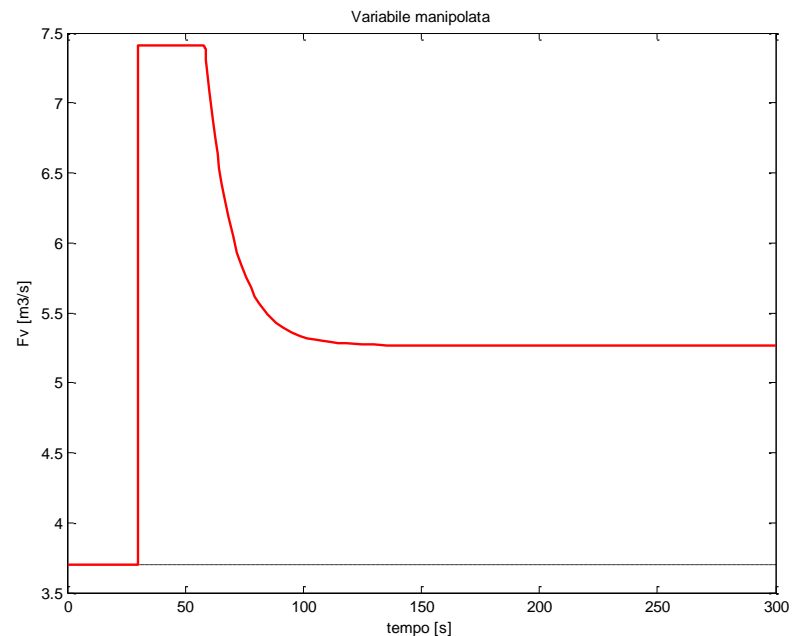
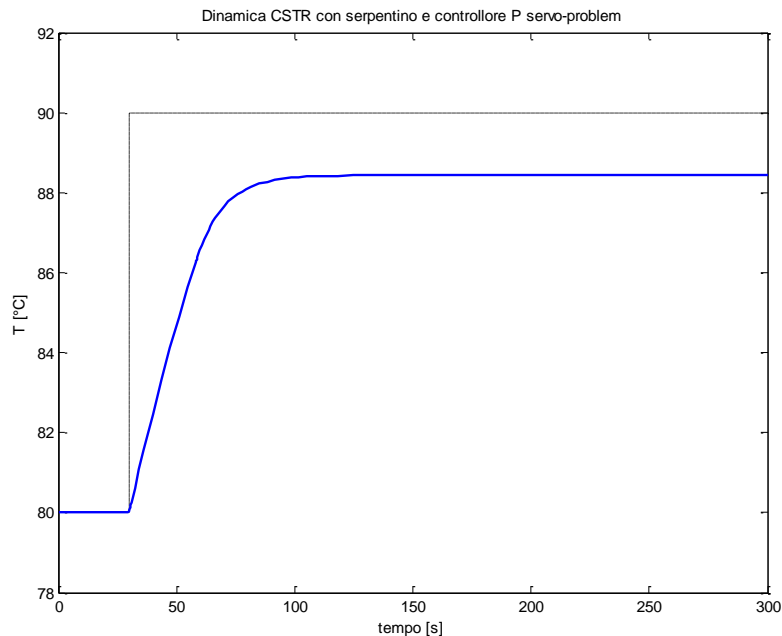


È possibile notare la presenza di offset finale nella variabile controllata.

L'offset diminuisce con il crescere della costante proporzionale,  $K_c$ .

# Controllo P su CSTR (servo problem)

Volendo introdurre dei limiti fisici sulla variabile manipolata (ad esempio  $F_v^{min} = 0$  e  $F_v^{max} = 2 F_v^{SS}$ ) si ottiene:

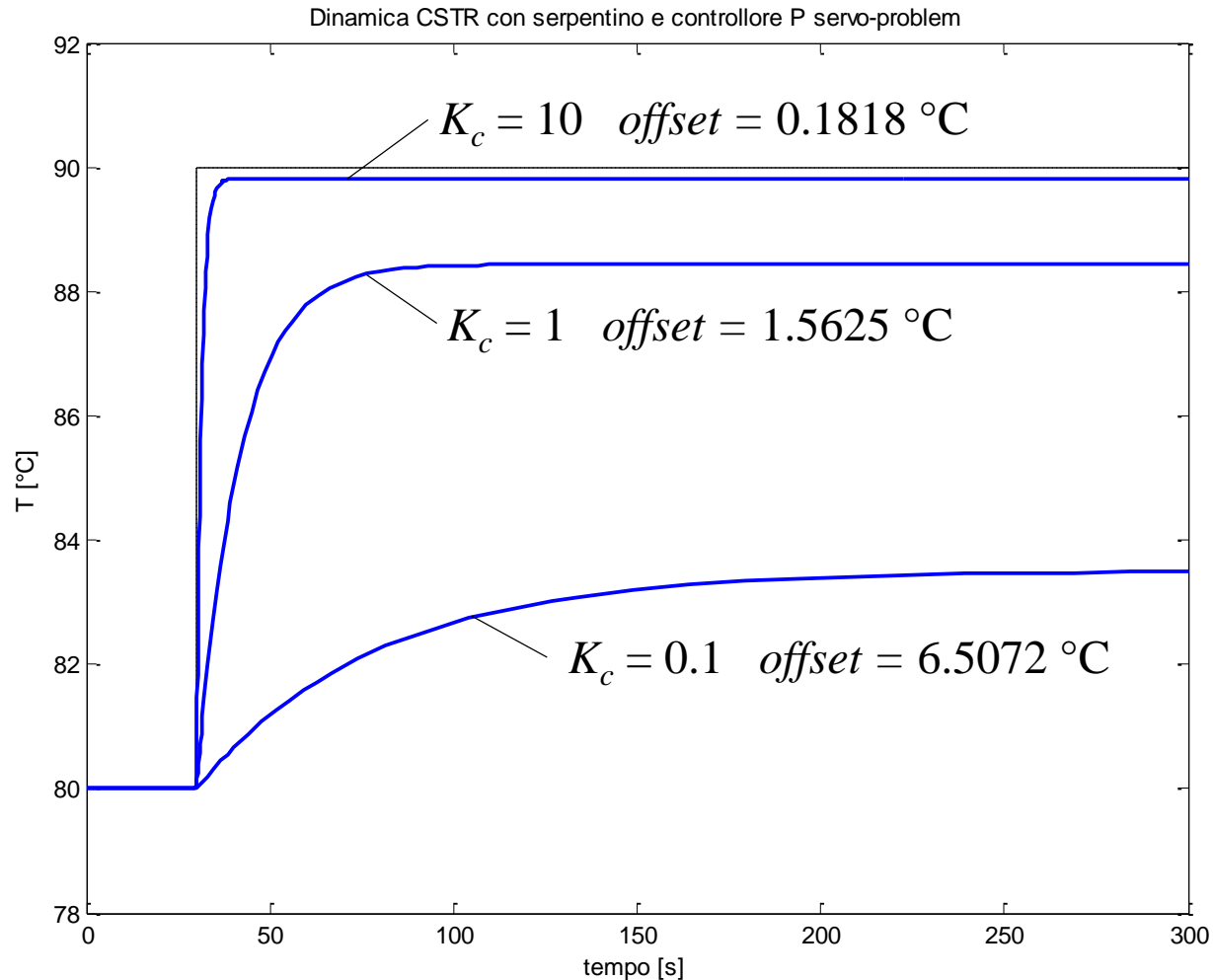


**N.B.:** dato che a transitorio esaurito la variabile manipolata non è in saturazione (rispetto ai vincoli fisici posti) l'offset finale è il medesimo del caso non vincolato.



# Controllo P su CSTR (servo problem)

L'offset si riduce man mano che si aumenta la costante proporzionale  $K_c$ :

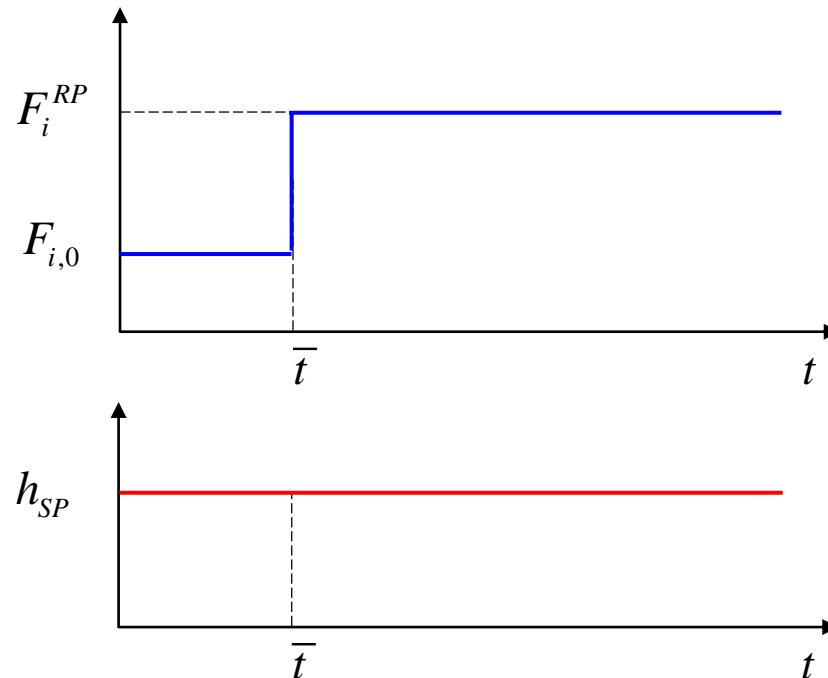




# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Consideriamo ora il problema di regolazione (**regulator problem**) ove ad un certo istante si ha un cambiamento a gradino di una delle variabili di input.

Nello specifico, si assume che ad un certo istante la portata entrante,  $F_i$ , venga modificata. Il sistema deve mantenere (per quanto possibile) la variabile controllata (livello,  $h$ ) al valore di setpoint assegnato modificando opportunamente la variabile manipolata (portata uscente,  $F_o$ ).



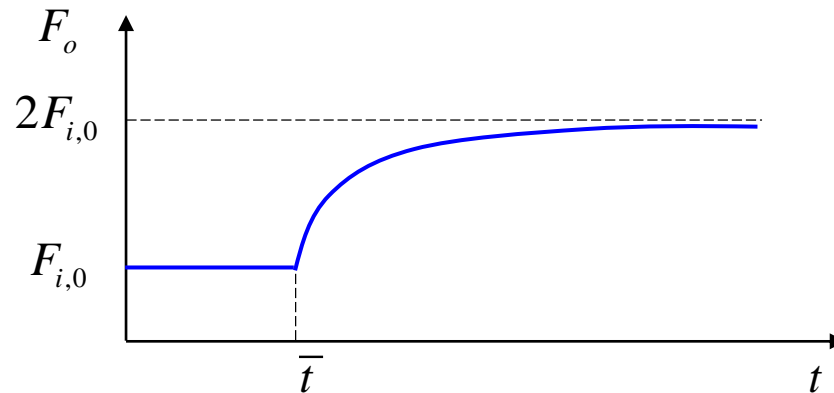
# Caso studio: controllo P di un serbatoio

La legge di controllo proporzionale resta sempre la stessa:

$$c(t) = c_s + K_c \varepsilon(t) \quad \varepsilon(t) = y_{sp} - y_m(t)$$

$$F_o(t) = F_{o,ss} + K_c (h_{sp} - h(t)) = F_{i,0} + K_c (h_{sp} - h(t))$$

Se a  $t = 10$  la portata entrante,  $F_i$ , viene raddoppiata possiamo prevedere qualitativamente il seguente andamento della variabile manipolata:



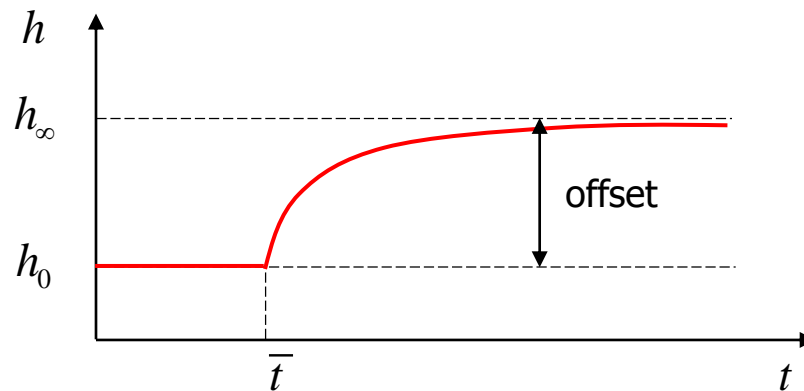
Si noti che al tempo  $\bar{t}$  l'errore  $\varepsilon$  (i.e. scostamento) tra variabile controllata e corrispondente setpoint è nullo in quanto il sistema deve permanere sul setpoint (già raggiunto).

# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Solo l'accumularsi dell'effetto del disturbo  $F_i(t)$  sulla variabile controllata  $h$  introduce progressivamente un contributo non nullo sull'errore  $\varepsilon$ .

Dato che la variabile manipolata tende a transitorio esaurito al nuovo valore della portata entrante (*i.e.* disturbo) anche l'altezza del serbatoio dovrà modificarsi per permettere alla variabile manipolata di raggiungere il valore finale.

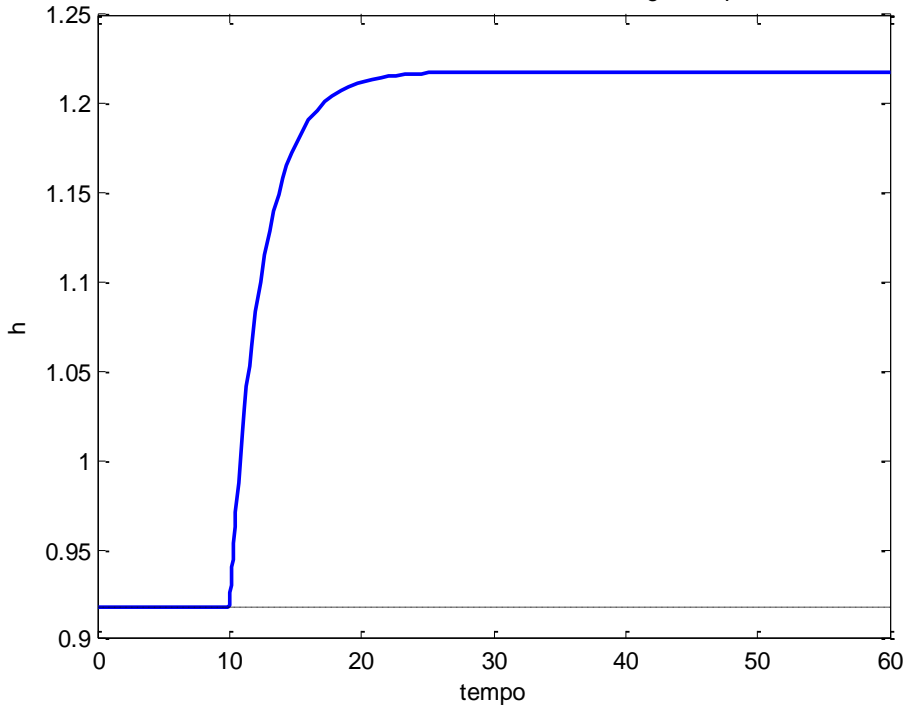
È quindi possibile prevedere qualitativamente il seguente andamento temporale della variabile controllata  $h$ :



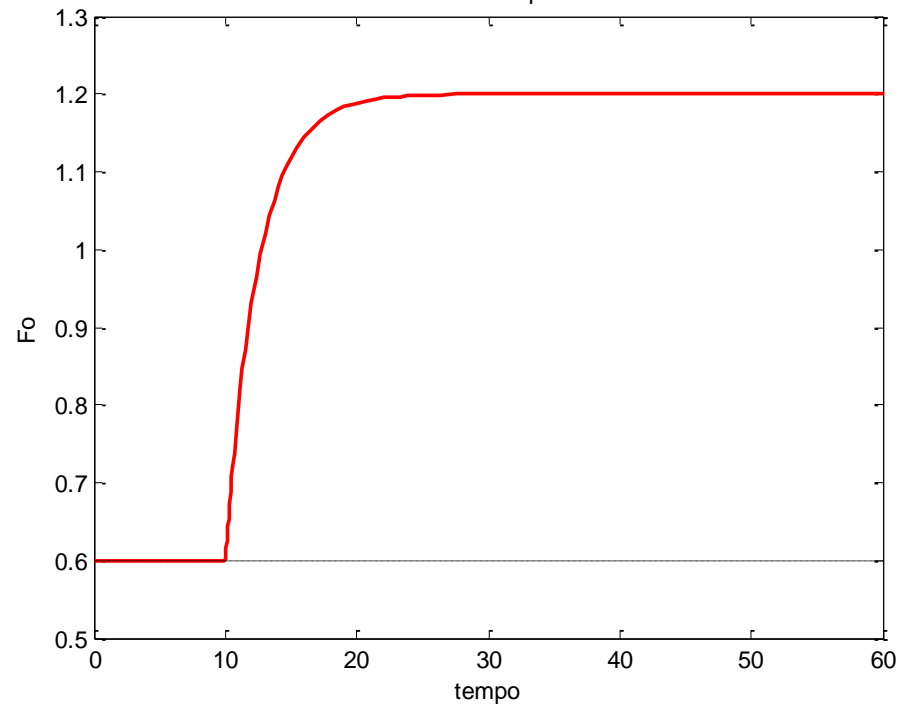
# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Risolvendo numericamente il problema di regolazione ad anello chiuso con il controllore proporzionale ove al tempo  $t = 10$  la portata entrante,  $F_i$ , viene raddoppiata si ottiene:

Dinamica di un serbatoio con controllore P regulator-problem



Variabile manipolata



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

Una prima analisi della *performance* del controllore proporzionale può lasciare perplessi in quanto la variabile controllata non riesce a raggiungere nuovamente il valore di setpoint assegnato, al contrario anche a transitorio esaurito permane uno scostamento costante.

Tale scostamento è detto **offset** ed è una caratteristica intrinseca del controllore proporzionale.

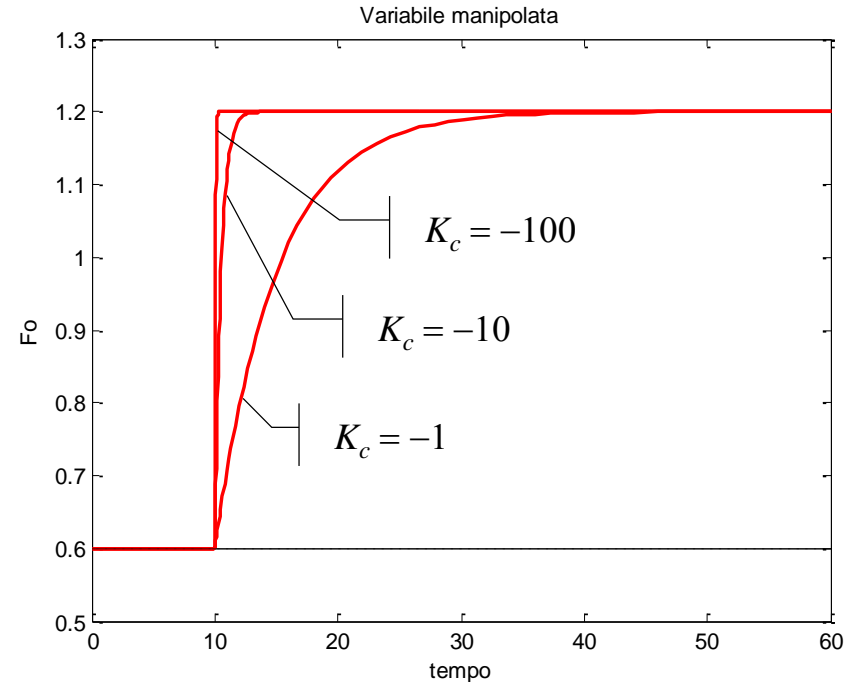
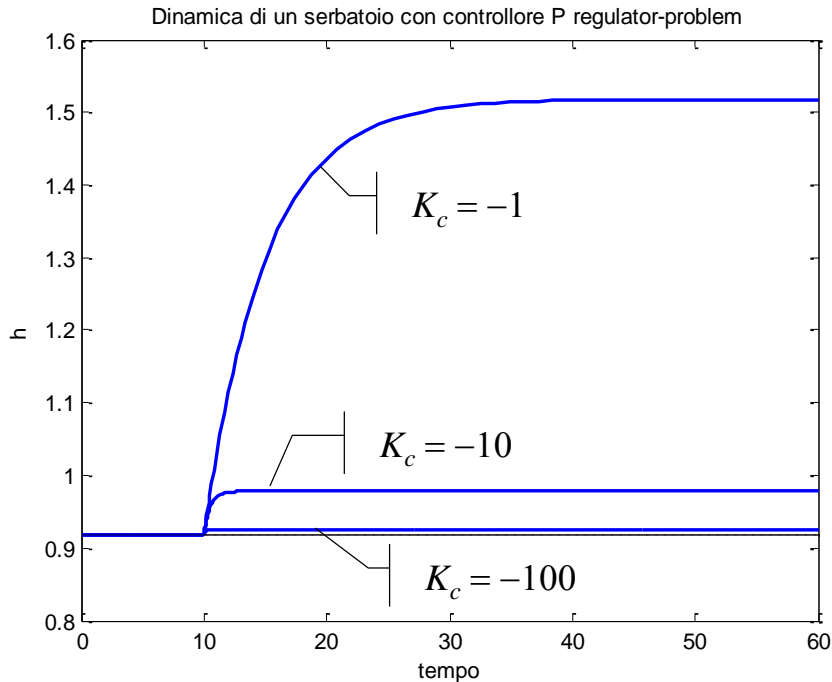
Al contempo non si può dire che il controllore non stia lavorando, infatti a transitorio esaurito la variabile manipolata,  $F_o$ , raggiunge il nuovo valore della variabile disturbata portata entrante  $F_i = 2 F_{i,0}$ .

Cosa succede se si incrementa il valore della costante proporzionale?



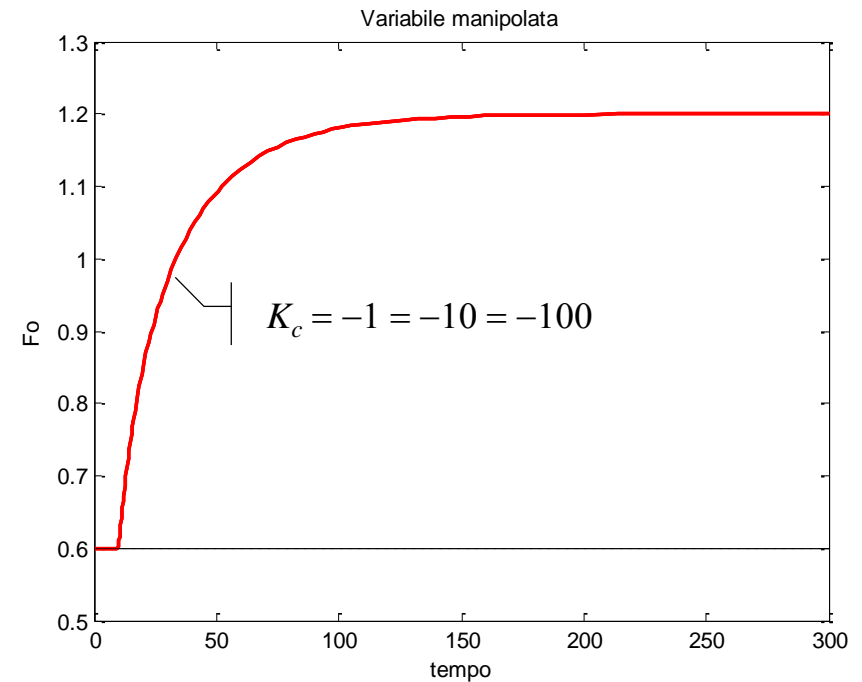
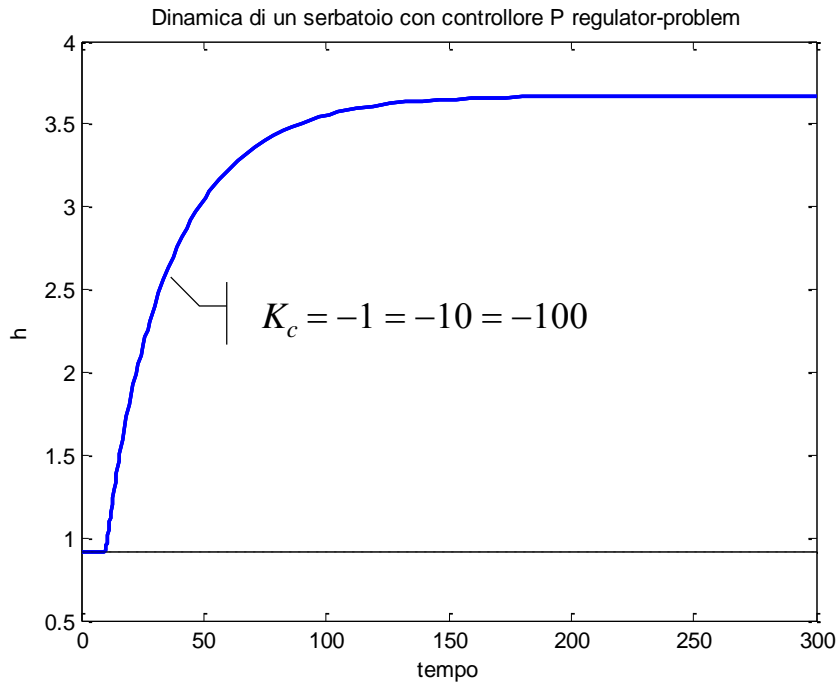
# Caso studio: controllo P di un serbatoio

È possibile notare che **l'offset si riduce ma permane** anche per elevati valori della costante proporzionale,  $K_c$ .



# Caso studio: controllo P di un serbatoio

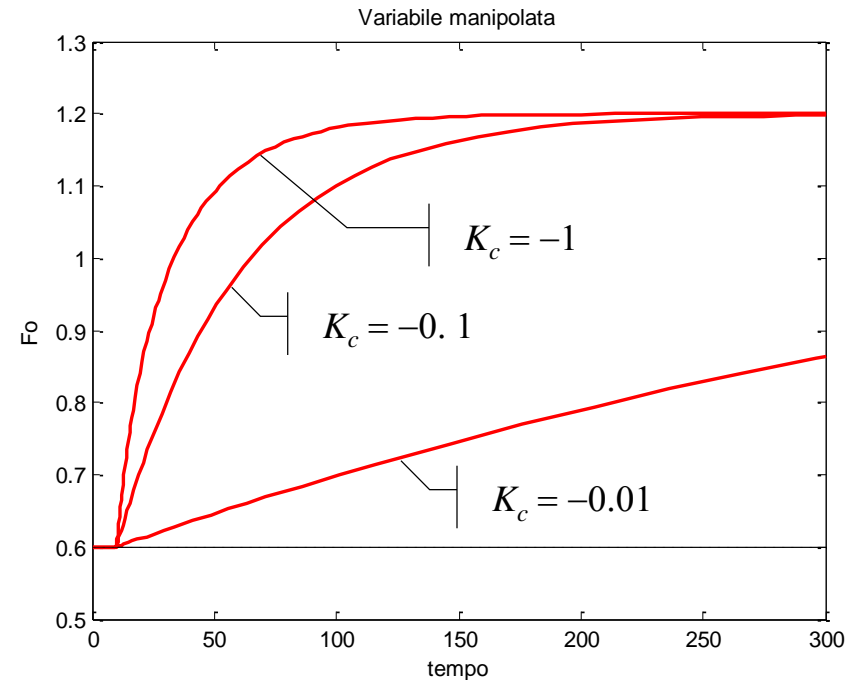
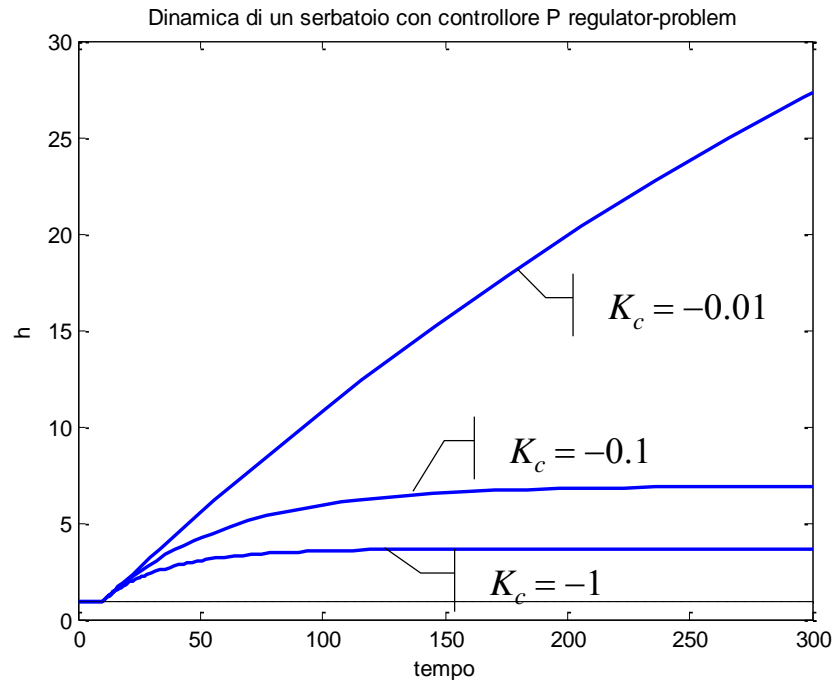
Se si introduce il vincolo fisico di fattibilità (i.e. dipendenza di  $F_o$  dal battente liquido nel serbatoio) sulla variabile manipolata,  $F_o$ , allora si ha un'ulteriore sorpresa:



Il sistema risponde allo stesso modo pur incrementando il valore della costante proporzionale in quanto dinamicamente viene raggiunto il **valore massimo** (di saturazione) della variabile manipolata,  $F_o$ , dipendente dal battente liquido  $h$ .

# Caso studio: controllo P di un serbatoio

È possibile ripristinare una soluzione di non saturazione della variabile manipolata riducendo significativamente il valore della costante proporzionale:



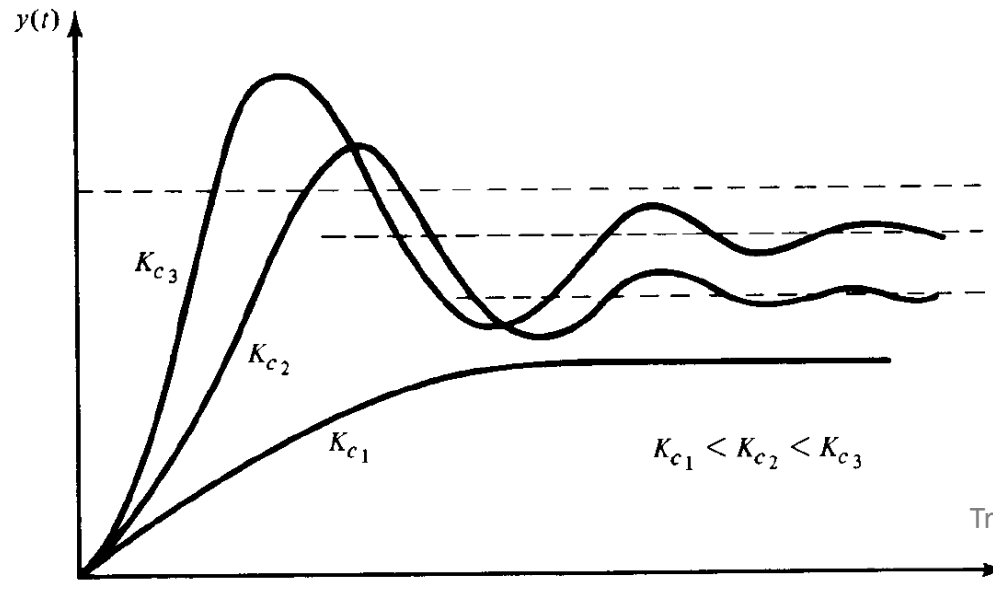
Più la costante proporzionale diminuisce, più il sistema controllato risponde lentamente. Tutti i sistemi raggiungono l'asintoto (mostrato dalla variabile manipolata) ma l'offset cresce man mano che la costante  $K_c$  diminuisce.



# Controllo P su sistemi di secondo ordine

Anche per sistemi di secondo ordine il controllore proporzionale per problemi sia di servomeccanismo che di regolazione non altera l'ordine complessivo ad anello chiuso. È possibile osservare che il guadagno statico diminuisce insieme al periodo naturale di oscillazione  $\tau$  ed al fattore  $\zeta$  di smorzamento.

Ciò significa che un sistema sovrasmorzato ad anello aperto con un opportuno valore della costante proporzionale  $K_c$  può diventare sottosmorzato e quindi oscillante (vedi anche dispense Lezione #3).



Tratto da: Stephanopoulos, 1984

# Controllore proporzionale-integrale



# Effetti del controllore PI sul sistema

Si rammenta che un controllore proporzionale è caratterizzato dall'azione di controllo:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + c_s$$

Ove:

- $\tau_I$  è la costante di tempo integrale o tempo di azzeramento (reset time)

È possibile dimostrare che:

- Un controllore PI aumenta l'ordine del sistema ad anello chiuso.
  - Ad esempio: un sistema del primo ordine ad anello aperto diviene del secondo ordine ad anello chiuso con un controllore PI.
- L'incremento dell'ordine del sistema comporta anche una risposta complessiva più lenta.
- L'azione integrale del controllore PI è in grado di eliminare ogni *offset*.



# Effetti del controllore PI sul sistema

È **possibile** inoltre **dimostrare** che il periodo naturale di oscillazione,  $\tau$ , e il fattore di smorzamento,  $\zeta$ , ad anello chiuso diventano:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_I \tau_p}{K_c K_p}}$$
$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{\tau_p K_c K_p}}$$

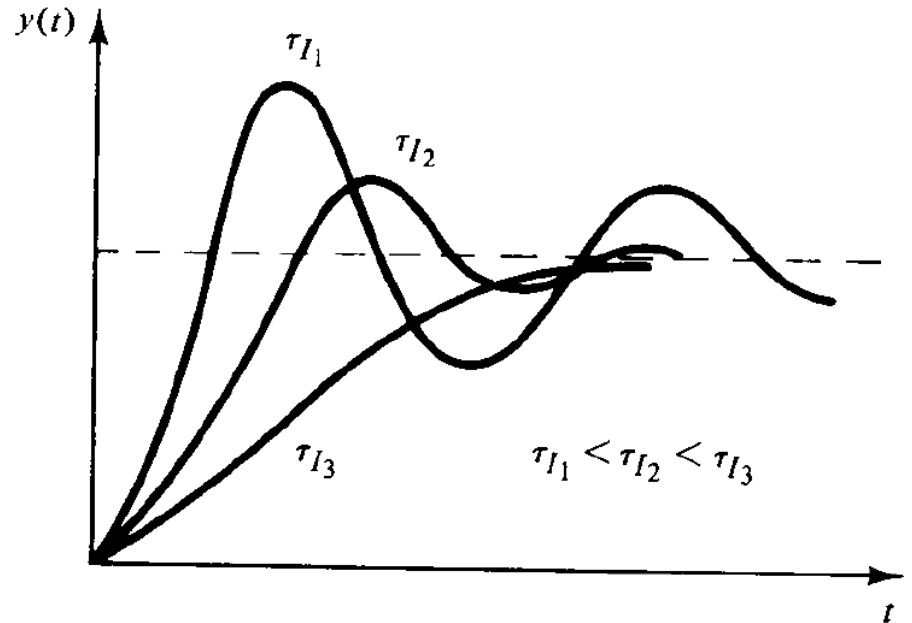
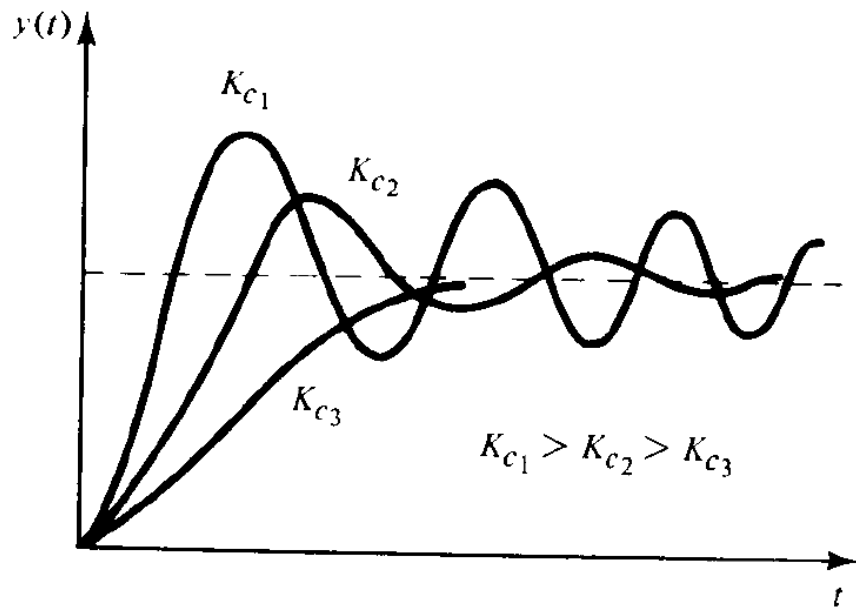
Conseguentemente la risposta sovrasmorzata o sottosmorzata (o a smorzamento critico) del sistema ad anello chiuso dipende dalla coppia di parametri di controllo:  $K_c$  e  $\tau_I$ .

Un sistema *closed loop* contraddistinto da una risposta lenta (quindi ad esempio sovrasmorzato) potrà rispondere più velocemente diventando sottosmorzato (perciò oscillante) tramite modulazione dei parametri di controllo  $K_c$  e  $\tau_I$ .



# Effetti del controllore PI sul sistema

Qualitativamente si hanno i seguenti andamenti del sistema ad anello chiuso in funzione dei parametri del controllore PI:



Tratto da: Stephanopoulos, 1984

# Effetti del controllore PI sul sistema

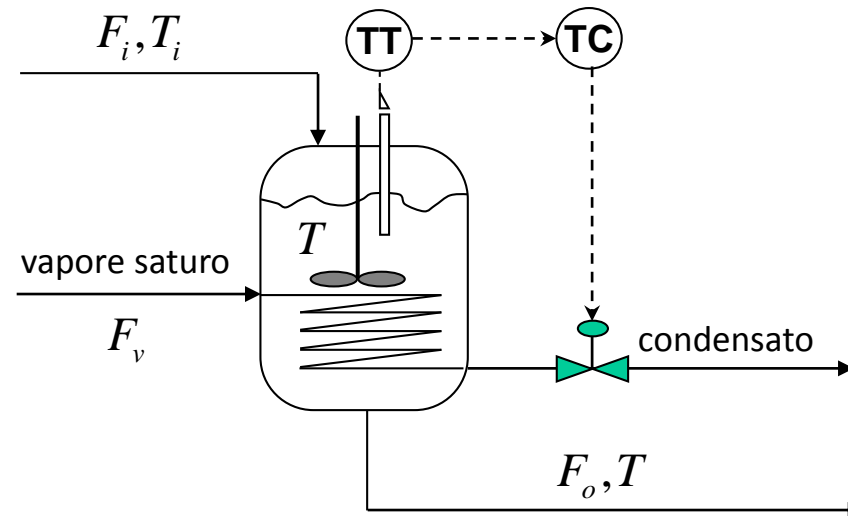
È quindi possibile osservare che:

- aumentando  $K_c$  diminuisce  $\zeta$ . Quindi il sistema passa progressivamente da lento sovrasmorzato (non oscillante) a veloce sottosmorzato (oscillante);
- l'overshoot ed il decay-ratio di un sistema ad anello chiuso aumentano;
- aumentando  $\tau_I$  aumenta  $\zeta$ . Quindi il sistema passa progressivamente da veloce sottosmorzato (oscillante) a lento sovrasmorzato (non oscillante);
- complessivamente aumentando  $K_c$  e diminuendo  $\tau_I$  si ottiene un sistema più sensibile ai disturbi/perturbazioni esterne ma anche più responsivo.



# Caso studio: controllo PI di un CSTR riscaldato

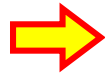
Controllo **proporzionale-integrale** della temperatura di un serbatoio riscaldato e perfettamente miscelato con variazione di setpoint rispetto alla condizione di stazionarietà tramite alimentazione di vapore condensante in un serpentino ad immersione.



Variabile controllata:  $T$

Variabile manipolata:  $F_v$

# Caso studio: controllo PI di un CSTR riscaldato



```
global Kc tauI TSP integrale tOld fOld
```

```
Kc = 0.1;      % costante proporzionale del controllore [m3/(s °C)]
```

```
tauI = 20.;   % costante integrale del controllore [s]
```



```
options = odeset('RelTol',1E-8, 'AbsTol',1E-12, 'OutputFcn',@Printo);
```

```
[t,T] = ode113(@(t,y)Sisdif(t,y,V,Ti,tau,rho,cp,deltaHev,FvSS, ...  
                    tCambioSP,iBoundsOnMV),tSpan,T0,options);
```





```
function dy = Sisdif(t,y,V,Ti,tau,rho,cp,deltaHev,FvSS,tCambioSP,iBoundsOnMV)
```

```
global Kc tauI TSP integrale tOld fOld
```

```
T = y(1);
```

```
if t < tCambioSP
```

```
    Fv = FvSS;      % condizione di steady-state
```

```
    tOld = t;
```

```
    fOld = TSP - T; % = 0 prima del cambio di set-point...
```

```
    integrale = 0.;
```

```
else
```

```
    % cambio di setpoint
```

```
    epsi = TSP - T;
```

```
    % calcolo contributo integrale
```

```
    integraleTemporaneo = integrale + (fOld + epsi) * (t - tOld) / 2.;
```

```
    % determinazione variabile manipolata
```

```
    Fv = FvSS + Kc * epsi + Kc / tauI * integraleTemporaneo;
```

```
    if iBoundsOnMV == 1
```

```
        FvMin = 0.;
```

```
        FvMax = 2. * FvSS; % se attivo limite variabile manipolata...;
```

```
        Fv = max(Fv, FvMin);
```

```
        Fv = min(Fv, FvMax);
```

```
    end
```

```
end
```

```
dy(1) = (Ti - T) / tau + deltaHev * Fv / (rho * V * cp);
```

```
end
```



```

function status = Printo(t,y,flag)

    global Kc tauI TSP integrale tOld fOld

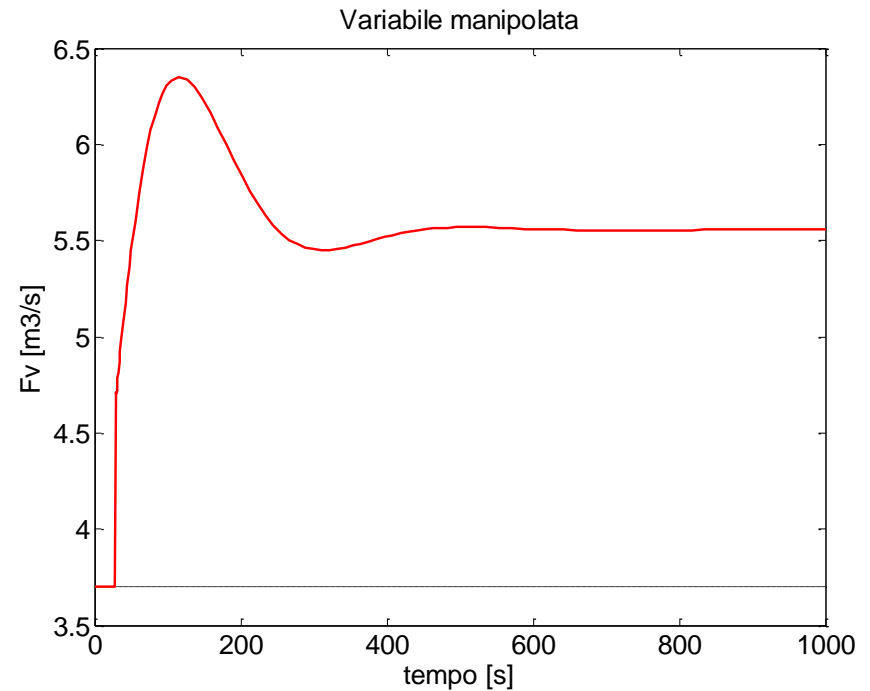
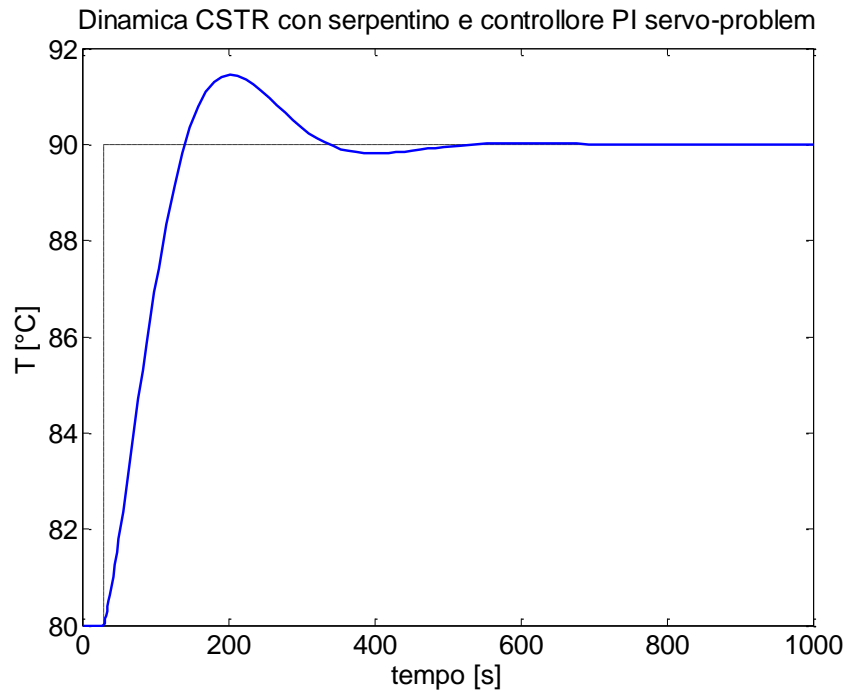
    if strcmp(flag, 'init')
        % inizializzazione della integrazione
    elseif strcmp(flag, 'done')
        % l'integrazione è terminata, è stato raggiunto tEnd
    else
        % l'integrazione è in corso
        T = y(1);
        epsi = TSP - T;
        fNew = epsi;
        tNew = t;
        integrale = integrale + (fOld + fNew) * (tNew - tOld) / 2.;
        fOld = fNew;
        tOld = tNew;
    end

    status = 0;    % [0] tutto OK; [1] stoppa l'integrazione
end

```



# Caso studio: controllo PI di un CSTR riscaldato

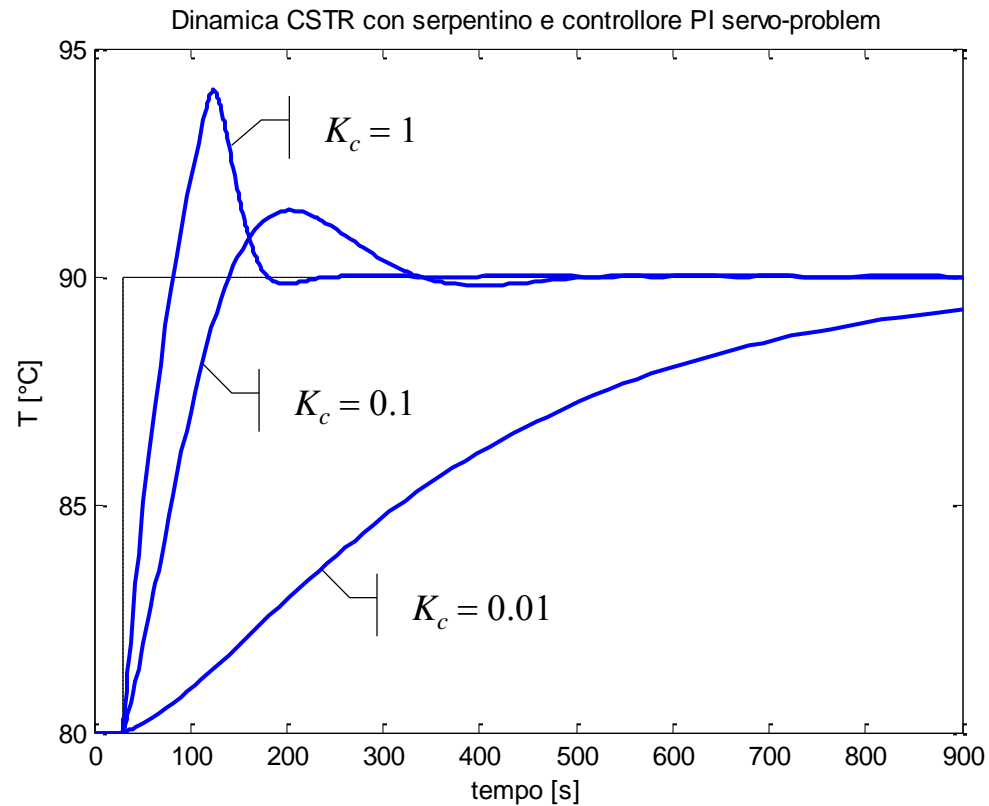


$K_c = 0.1;$     % costante proporzionale del controllore [m<sup>3</sup>/(s °C)]

$\tau_{I} = 20.;$     % costante integrale del controllore [s]



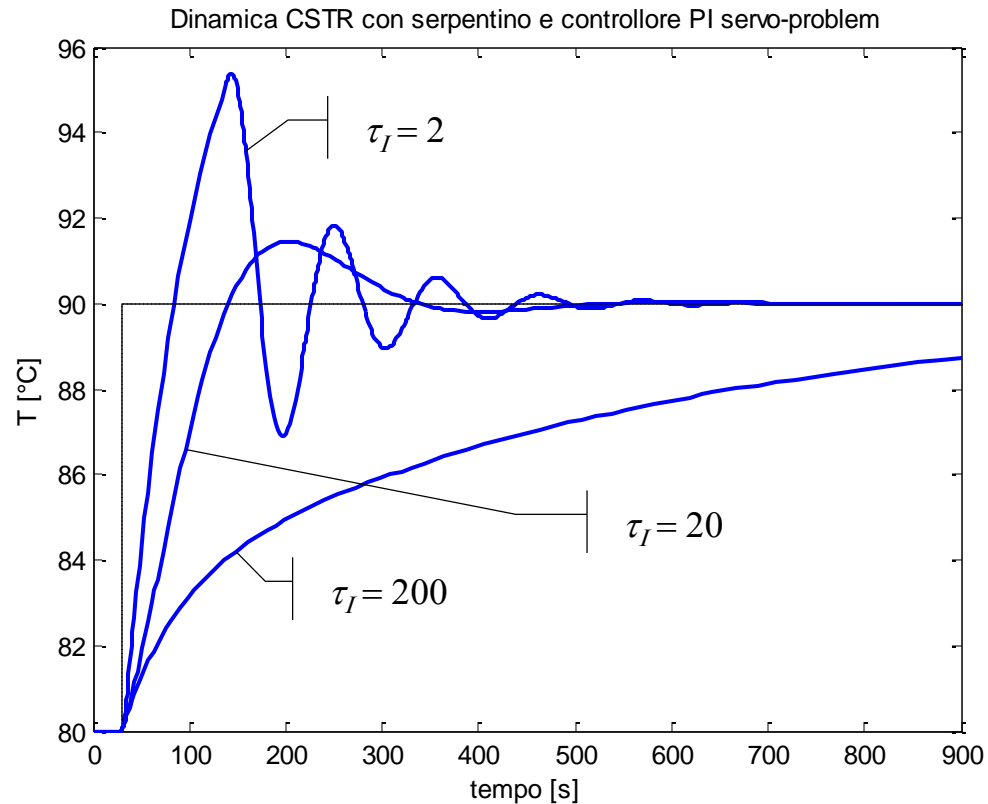
# Caso studio: controllo PI di un CSTR riscaldato



$\text{tauI} = 20.;$  % costante integrale del controllore [s]



# Caso studio: controllo PI di un CSTR riscaldato



$K_c = 0.1$ ;    % costante proporzionale del controllore [ $m^3/(s \text{ } ^\circ\text{C})$ ]



# Approccio alternativo calcolo termine integrale

```
function dy = Sisdif(t,y,V,Ti,tau,rho,cp,deltaHev,FvSS, ...  
                    tCambioSP,TSP,Kc,tauI,iBoundsOnMV)
```

```
T = y(1);
```

```
→ integrale = y(2);
```

```
if t < tCambioSP
```

```
Fv = FvSS;      % condizione di steady-state
```

```
→ epsi = 0.;
```

```
else
```

```
→ epsi = TSP - T;
```

```
Fv = FvSS + Kc * epsi + Kc / tauI * integrale; % var. manipolata
```

```
if iBoundsOnMV == 1 % limite sulla variabile manipolata...;
```

```
FvMin = 0.;    FvMax = 2. * FvSS;
```

```
Fv = max(Fv, FvMin);    Fv = min(Fv, FvMax);
```

```
end
```

```
end
```

```
dy(1) = (Ti - T) / tau + deltaHev * Fv / (rho * V * cp);
```

```
→ dy(2) = epsi;      % calcolo automatico dell'integrale epsi(t)*dt
```

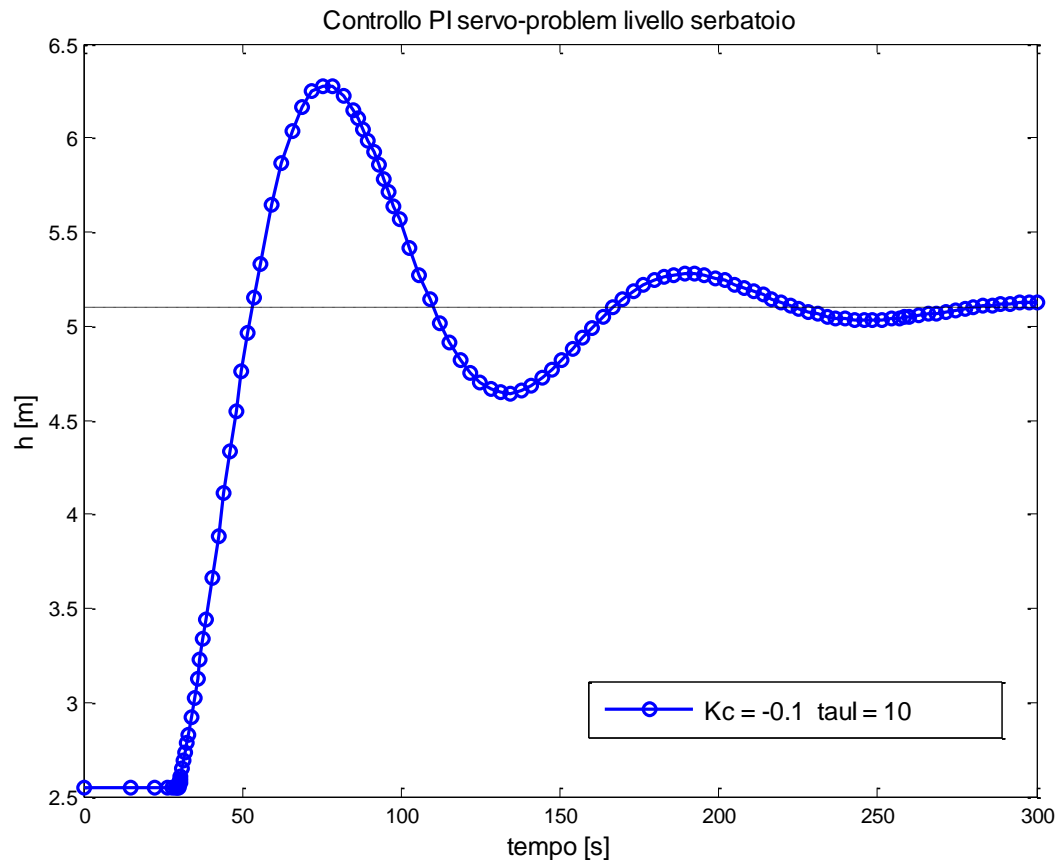
```
dy = dy';    % per avere il vettore colonna...
```

```
end
```



# Caso studio: controllo PI di un serbatoio

Anche nel caso di sistema del primo ordine puramente capacitivo il controllore PI aumentando l'ordine del sistema può renderlo (come nell'esempio qui riportato) sottosmorzato e quindi oscillante:



# Azione derivativa





# Contributo termine derivativo

Il termine derivativo di un controllore in retroazione è:  $K_c \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt}$

ove  $\tau_D$  è la costante di tempo derivativa.

Il termine derivativo di un controllore in retroazione ha le seguenti caratteristiche:

- non modifica l'ordine del sistema;
- la risposta del processo ad anello chiuso è più lenta di quella originale;
- nel caso di sistemi del secondo ordine, il fattore di smorzamento  $\zeta$  risulta maggiore di quello ad anello aperto:

$$\zeta' = \zeta + \frac{K_c K_p \tau_D}{2\tau}$$

- la diminuzione della velocità di risposta del sistema e l'aumento del fattore di smorzamento (per sistemi del II ordine ad anello chiuso) danno luogo ad un processo controllato più robusto ma anche meno responsivo.



# Controllori P, PI, PID



# Controllori P, PI, PID

Mentre è frequente vedere implementati controllori puramente proporzionali, P, soprattutto per quanto riguarda il controllo di livello (dove è accettato un certo offset rispetto al setpoint assegnato) viceversa i termini integrali e derivativi sono implementati in connubio con il termine proporzionale a dare controllori PI e PID.

Nel caso specifico di controllori PID, la risposta del sistema ad anello chiuso è molto simile a quella del controllore PI.

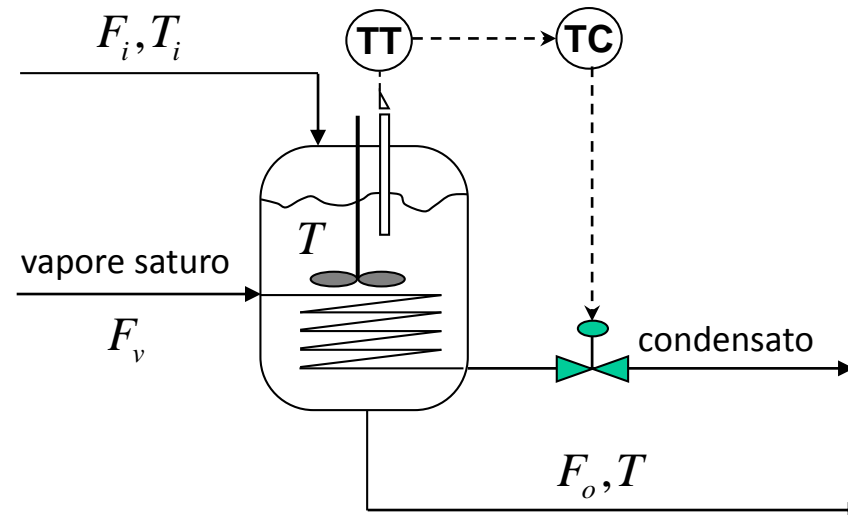
Si è visto però che il termine integrale di un controllore PI rallenta la risposta del sistema ad anello chiuso. Per rendere il sistema più responsivo è possibile aumentare il valore del guadagno proporzionale,  $K_c$ , ma ciò rende il sistema più oscillante con il pericolo di instabilità.

L'introduzione in questo caso del termine derivativo rende il sistema più robusto (*i.e.* stabile). È quindi possibile trovare un compromesso tra sistema più responsivo ed al contempo con overshoot e decay-ratio contenuti.



# Caso studio: controllo PID di un CSTR riscaldato

Controllo **proporzionale-integrale-derivativo** della temperatura di un serbatoio riscaldato e perfettamente miscelato con variazione di setpoint rispetto alla condizione di stazionarietà tramite alimentazione di vapore condensante in un serpentino ad immersione.



Variabile controllata:  $T$

Variabile manipolata:  $F_v$

# Caso studio: controllo PID di un CSTR riscaldato



```
global tOld fOld epsi TSP
```

```
Kc = 0.1; % costante proporzionale del controllore [m3/(s °C)]
```

```
tauI = 2.; % costante integrale del controllore [s]
```

```
tauD = 50.; % costante derivativa del controllore [s]
```

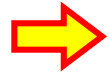
```
y0 = [TSS 0.];
```

```
options = odeset('RelTol',1E-8, 'AbsTol',1E-12, 'OutputFcn',@Printo);
```

```
[t,y] = ode113(@(t,y)Sisdif(t,y,V,Ti,tau,rho,cp,deltaHev,FvSS,...  
tCambioSP,Kc,tauI,tauD,iBoundsOnMV),tSpan,y0,options);
```



```
function dy = Sisdif(t,y,V,Ti,tau,rho,cp,deltaHev,FvSS,tCambioSP, ...
                    Kc,tauI,tauD,iBoundsOnMV)
```



```
global tOld fOld epsi TSP
```

```
T = y(1);
```

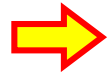
```
epsi = TSP - T;
```

```
if t < tCambioSP
```

```
    Fv = FvSS;    % condizione di steady-state
```

```
else
```

```
    integrale = y(2);
```



```
    derivata = (epsi - fOld) / (t - tOld);
```

```
    % variabile manipolata
```



```
    Fv = FvSS + Kc*epsi + Kc/tauI*integrale + Kc*tauD*derivata;
```

```
    if iBoundsOnMV == 1 % limite sulla variabile manipolata...;
```

```
        FvMin = 0.;    FvMax = 2. * FvSS;
```

```
        Fv = max(Fv, FvMin);    Fv = min(Fv, FvMax);
```

```
    end
```

```
end
```

```
dy(1) = (Ti - T) / tau + deltaHev * Fv / (rho * V * cp);
```

```
dy(2) = epsi;    % calcolo automatico dell'integrale epsi(t)*dt
```

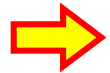
```
dy = dy';    % per avere il vettore colonna...
```

```
end
```



# Caso studio: controllo PID di un CSTR riscaldato

```
function status = Printo(t,y,flag)
```



```
global tOld fOld epsi TSP
```

```
if strcmp(flag, 'init')
```

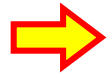
```
    % inizializzazione della integrazione
```

```
elseif strcmp(flag, 'done')
```

```
    % l'integrazione è terminata, è stato raggiunto tEnd
```

```
else
```

```
    % l'integrazione è in corso...
```



```
    { tOld = t;
```

```
      fOld = TSP - y(1);
```

```
    end
```

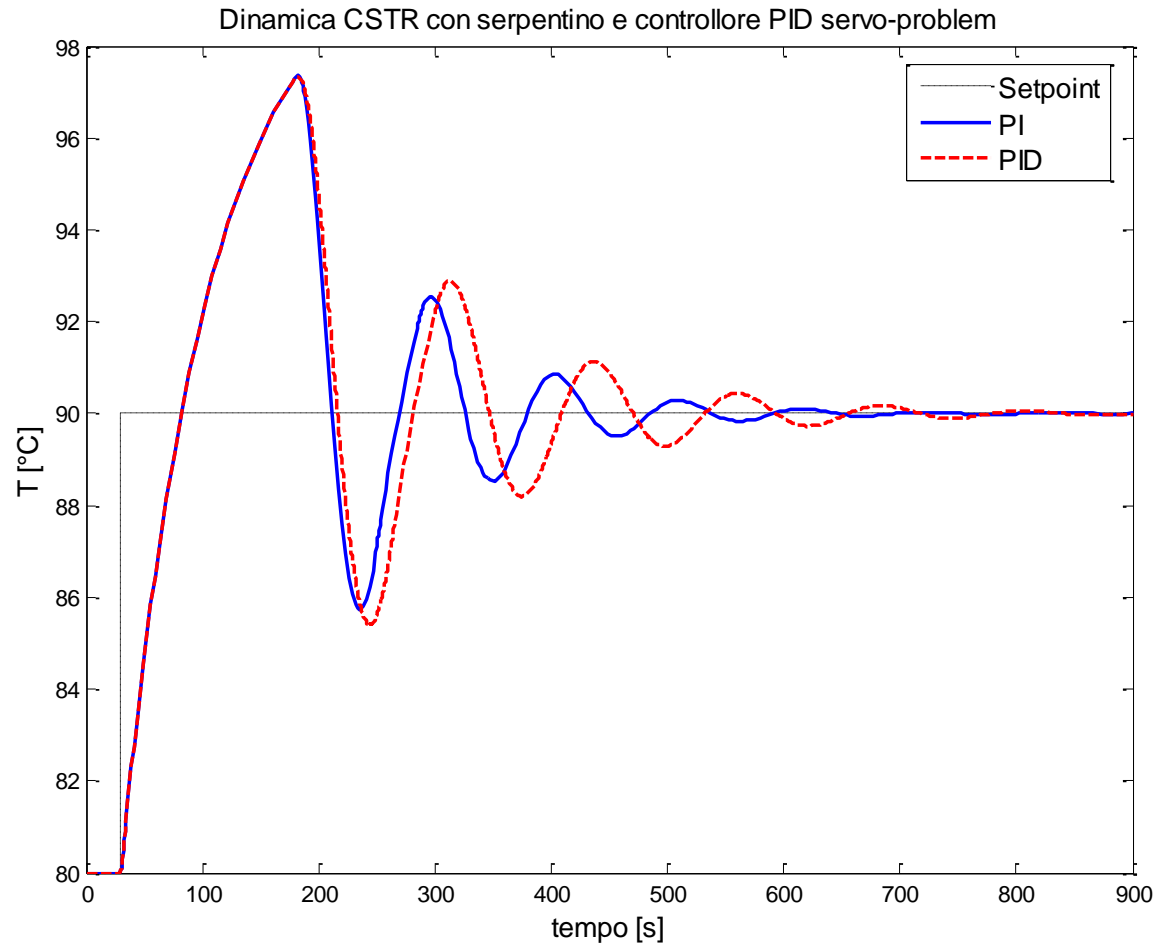
```
    % [0] tutto OK, continua con l'integrazione; [1] stop integrazione
```

```
    status = 0;
```

```
end
```



# Caso studio: controllo PID di un CSTR riscaldato



$K_c = 0.1;$  % costante proporzionale del controllore [ $m^3/(s \text{ } ^\circ\text{C})$ ]

$\tau_I = 20.;$  % costante integrale del controllore [s]

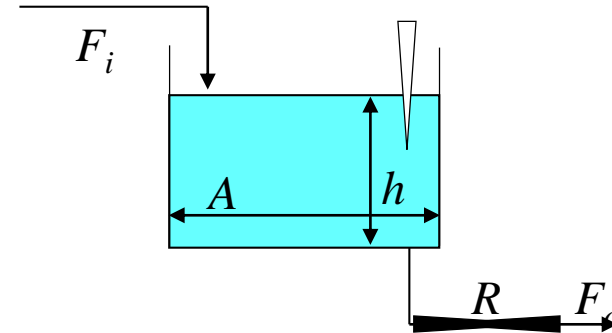
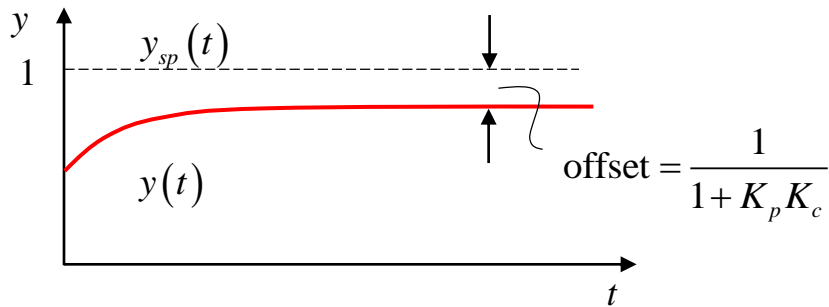
$\tau_D = 50.;$  % costante derivativa del controllore [s]











### Sistemi del primo ordine

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b f(t)$$

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy}{dt} + y = \frac{b}{a_0} f(t)$$

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p f(t)$$

$$\tau_p = \frac{a_1}{a_0} \quad K_p = \frac{b}{a_0}$$

### Sistemi del primo ordine capacitivo

$$A \frac{dh}{dt} = F_i - F_o = F_i - \frac{h}{R}$$

$$AR \frac{dh}{dt} + h = RF_i$$

$$\tau_p = AR$$

$$K_p = R$$

$$\text{offset} = \frac{1}{1 + K_p K_c} = \frac{1}{1 + RK_c}$$