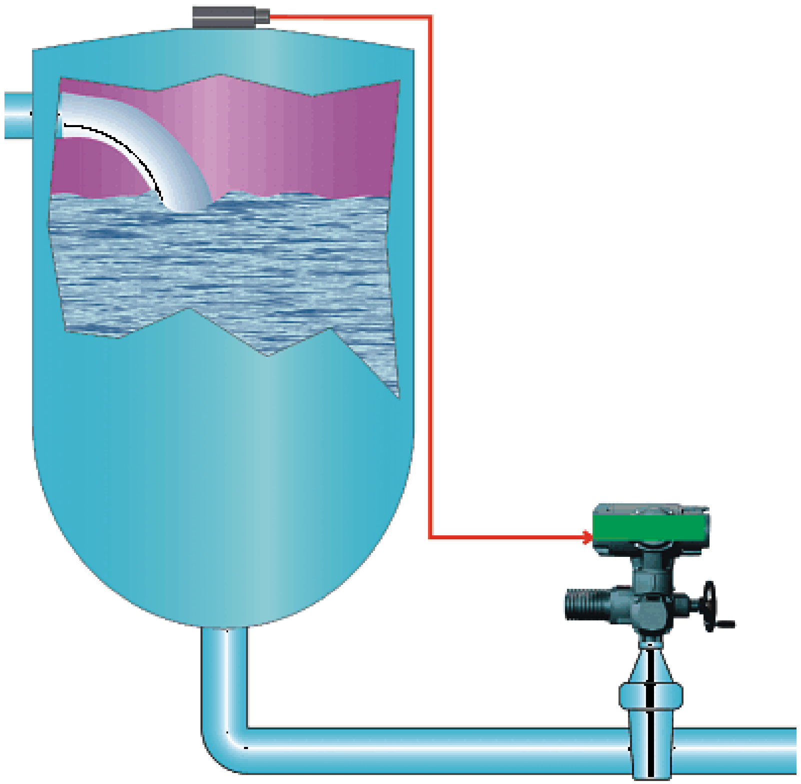
L2

Modellazione dinamica per il controllo di processo



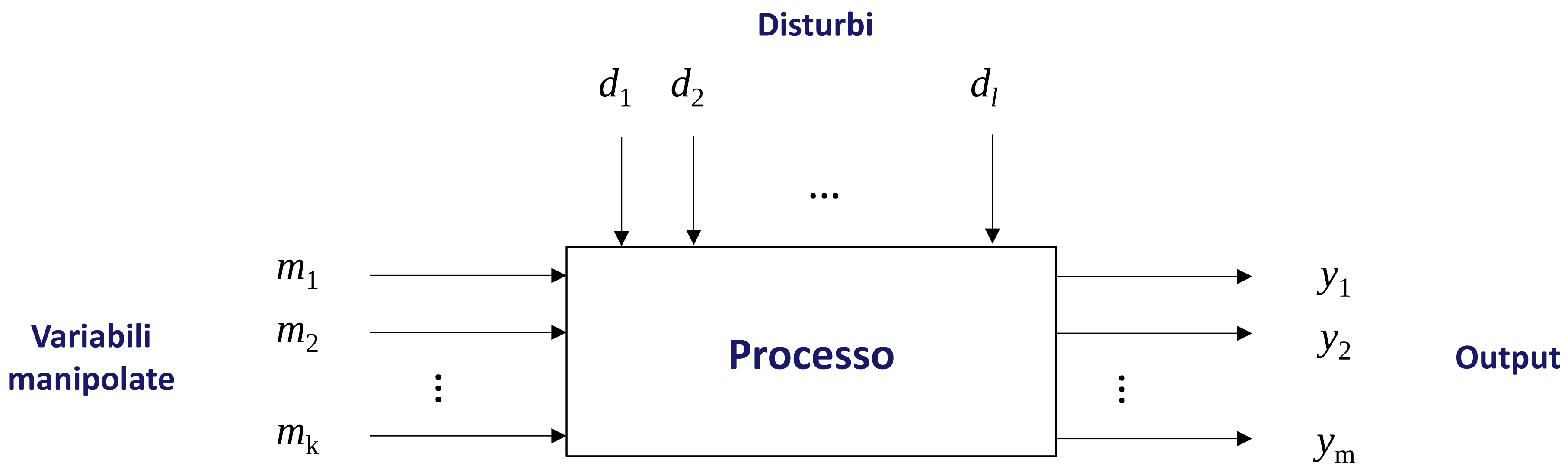
Dinamica di processo

Il controllo di processo richiede la **conoscenza** della **risposta dinamica** del sistema.

Il **modello** con il quale studiare le caratteristiche del processo (*e.g.*, singola apparecchiatura, sottosezione di impianto o impianto complessivo) e la risposta dello stesso a disturbi esterni o algoritmi di controllo deve quindi essere **dinamico e strutturato** secondo una organizzazione **input-output**.

Struttura input-output

Un processo chimico può essere sempre descritto secondo la seguente rappresentazione schematica:

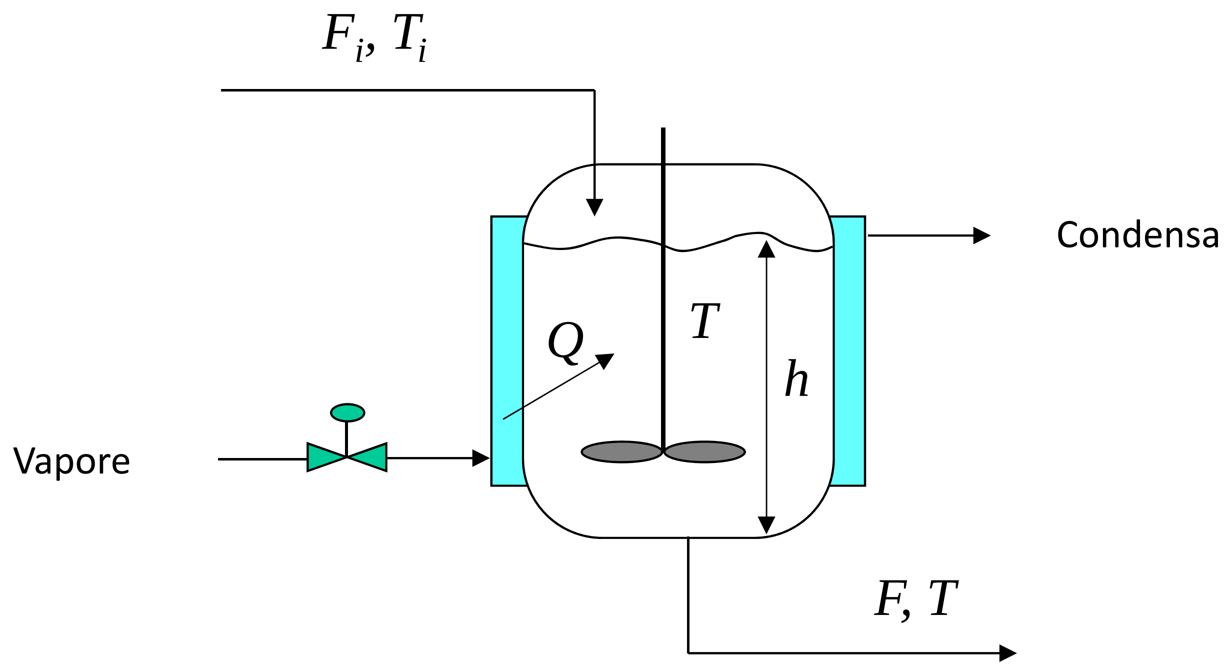


output = *f* (variabili di input)

$$y_i = f\left(m_1, m_2, \ldots, m_k; d_1, d_2, \ldots, d_l\right) \qquad i = 1, \ldots, m$$

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

Si consideri il seguente **serbatoio riscaldato** e **perfettamente miscelato**:



Le quantità fondamentali per la conoscenza dello stato del sistema sono:

- la massa totale di liquido nel serbatoio
- l’energia totale del liquido nel serbatoio
- la quantità di moto

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

Massa totale di liquido nel serbatoio:

$$M = \rho V = \rho A h$$

Energia totale del liquido nel serbatoio:

$$E = U + K + P$$

Ma il serbatoio è immobile, quindi: $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{dP}{dt} = 0$

Segue che: $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dU}{dt}$

E per i liquidi: $\dfrac{dU}{dt} \simeq \dfrac{dH}{dt}$

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

Inoltre: $H = \rho V c_p \left(T - T_{ref}\right) = \rho A h c_p \left(T - T_{ref}\right)$

Conseguentemente le **variabili di stato** del serbatoio sono: h e T

Mentre i **parametri costanti** sono: ρ, A, c_p, T_{ref}

avendo assunto la densità ed il calore specifico del liquido indipendenti dalla temperatura del sistema.

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

È ora possibile scrivere **due bilanci dinamici** relativi alla **conservazione** delle quantità: **massa totale** ed **energia totale**:

$$\frac{\text{accumulo massa totale}}{\text{tempo}} = \frac{\text{ingresso massa totale}}{\text{tempo}} - \frac{\text{uscita massa totale}}{\text{tempo}}$$

$$\frac{d\left(\rho A h\right)}{dt} = \rho F_i - \rho F$$

$$\frac{\text{accumulo energia totale}}{\text{tempo}} = \frac{\text{ingresso energia totale}}{\text{tempo}} - \frac{\text{uscita energia totale}}{\text{tempo}}$$

$$\frac{d\left(\rho A h c_p (T - T_{ref})\right)}{dt} = \rho F_i c_p \left(T_i - T_{ref}\right) - \rho F c_p \left(T - T_{ref}\right) + Q$$

dove F_i e F sono portate volumetriche (*e.g.*, [m³/s], [l/min], [m³/h]) e Q è il flusso di calore fornito dal vapore nella camicia (*e.g.*, [J/s], [kW], [W])

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

Semplificando si ottiene:

$$\begin{cases} A\dfrac{dh}{dt} = F_i - F \\ A\dfrac{d\left(hT\right)}{dt} = F_i T_i - FT + \dfrac{Q}{\rho c_p} \end{cases}$$

N.B.: avendo scelto $T_{ref} = 0$

Inoltre: $$A\frac{d\left(hT\right)}{dt} = Ah\frac{dT}{dt} + AT\frac{dh}{dt} = Ah\frac{dT}{dt} + T\left(F_i - F\right)$$

Quindi: $$Ah\frac{dT}{dt} + T\left(F_i - F\right) = F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho c_p}$$

$$Ah\frac{dT}{dt} = F_i T_i - FT - TF_i + TF + \frac{Q}{\rho c_p} = F_i\left(T_i - T\right) + \frac{Q}{\rho c_p}$$

Il modello dinamico si riduce a:

$$\begin{cases} A\dfrac{dh}{dt} = F_i - F \\ Ah\dfrac{dT}{dt} = F_i\left(T_i - T\right) + \dfrac{Q}{\rho c_p} \end{cases}$$

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

Riassumendo abbiamo:

- **variabili di stato**: h , T
- **variabili di output**: h , T (entrambe misurate)
- **variabili di input**:
  - **disturbi**: T_i , F_i
  - **variabili manipolate**:
    - Q , F (nel caso di controllo in retroazione (feedback))
    - F_i (nel caso di controllo in anteazione (feedforward))

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

Torniamo al sistema dinamico e ipotizziamo che $F_i = F$.

Segue che:
$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = 0 \\ Ah\dfrac{dT}{dt} = F_i\left(T_i - T\right) + \dfrac{Q}{\rho c_p} \end{cases}$$

Quindi dato che h è costante possiamo focalizzare l'attenzione sul solo bilancio energetico.

Il calore ceduto dal vapore è pari a: $Q = UA_{exc}\left(T_{vap} - T\right)$

L'equazione di bilancio energetico diviene:

$$Ah\frac{dT}{dt} = F_i\left(T_i - T\right) + \frac{Q}{\rho c_p} = F_iT_i - F_iT + \frac{UA_{exc}\left(T_{vap} - T\right)}{\rho c_p} = F_iT_i - F_iT + \frac{UA_{exc}}{\rho c_p}T_{vap} - \frac{UA_{exc}}{\rho c_p}T$$

$$Ah\frac{dT}{dt} + \left(F_i + \frac{UA_{exc}}{\rho c_p}\right)T = F_iT_i + \frac{UA_{exc}}{\rho c_p}T_{vap}$$

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

L'equazione differenziale relativa al bilancio energetico assume quindi la forma:

$$Ah\frac{dT}{dt}+\left(F_i+\frac{UA_{exc}}{\rho c_p}\right)T=F_iT_i+\frac{UA_{exc}}{\rho c_p}T_{vap}$$

che può essere compattata in:

$$\boxed{\frac{dT}{dt}+aT=\frac{1}{\tau}T_i+KT_{vap}}$$

ove: $a=\frac{1}{\tau}+K \qquad \frac{1}{\tau}=\frac{F_i}{Ah} \qquad K=\frac{UA_{exc}}{Ah\rho c_p}$

L'equazione evidenziata nel rettangolo rosso rappresenta il **modello matematico** del **serbatoio riscaldato e miscelato** dove T è la variabile di stato mentre T_i e T_{vap} sono le variabili di input.

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

Vediamo ora come sviluppare il modello input-output.

In condizioni stazionarie il bilancio energetico si riduce a:

$$\frac{dT}{dt} + aT = \frac{1}{\tau}T_i + KT_{vap} \quad \Rightarrow \quad 0 + aT_s = \frac{1}{\tau}T_{i,s} + KT_{vap,s}$$

Dove il pedice s apposto alle variabili di processo indica appunto la condizione di stazionarietà del sistema.

Sottraendo l'equazione di stazionarietà a quella dinamica si ottiene:

$$\frac{d\left(T - T_s\right)}{dt} + a\left(T - T_s\right) = \frac{1}{\tau}\left(T_i - T_{i,s}\right) + K\left(T_{vap} - T_{vap,s}\right)$$

o in forma compatta: $$\frac{dT'}{dt} + aT' = \frac{1}{\tau}T_i' + KT_{vap}'$$

Esempio di serbatoio riscaldato e miscelato

La soluzione analitica dell'ultima equazione differenziale è:

$$T'(t) = c\,e^{-at} + e^{-at}\int_0^t e^{at}\left(\frac{1}{\tau}T_i' + KT_{vap}'\right)dt$$

Se si assume che all'inizio (*i.e.* condizioni iniziali) il serbatoio sia in condizioni stazionarie (*i.e.* $T'(0) = 0$) allora $c = 0$ e risulta:

$$\boxed{T'(t) = e^{-at}\int_0^t e^{at}\left(\frac{1}{\tau}T_i' + KT_{vap}'\right)dt}$$

Si noti che questa equazione esprime la relazione tra gli input T_i', T_{vap}'

e l'output T' ed è quindi il **modello input-output** del serbatoio riscaldato e miscelato.

Gradi di libertà di un processo

I gradi di libertà di un processo sono le variabili che debbono essere specificate al fine di definire in modo esaustivo il processo stesso.

Conseguentemente **un sistema è controllato se e solo se tutti i rispettivi gradi di libertà sono stati specificati**.

Per maggior chiarezza si consideri nuovamente il modello dinamico del serbatoio riscaldato e perfettamente miscelato:

$$\begin{cases} A\dfrac{dh}{dt} = F_i - F \\ Ah\dfrac{dT}{dt} = F_i\left(T_i - T\right) + \dfrac{Q}{\rho c_p} \end{cases}$$

La risoluzione di questo sistema ODE permette di conoscere l'evoluzione dinamica delle variabili dipendenti h e T quando gli input T_i, F_i, F e Q cambiano.

N.B.: F pur essendo la portata uscente dal serbatoio rappresenta un input del modello matematico.

Gradi di libertà di un processo

Nascono spontanee due domande:

- **il sistema ODE è risolubile?**
- **se il sistema è risolubile quante soluzioni esistono?**

Il **teorema di Cauchy** relativo a sistemi ODE con condizioni iniziali ci assicura che se il problema è ben posto esiste sempre una soluzione.

Per quanto riguarda il **numero di soluzioni** è sufficiente contare il **numero di equazioni**: 2 ed il **numero di variabili**: 6 *i.e.* h, T, F_i, F, T_i, Q (avendo assunto che A, ρ, c_p siano dei parametri assegnati e costanti.

È possibile osservare che il numero di variabili è maggiore del numero di equazioni, quindi esiste un'infinità di possibili soluzioni in funzione dell'assegnazione delle 4 variabili in sovrannumero rispetto alle equazioni costitutive disponibili.

Gradi di libertà di un processo

In realtà è possibile assegnare arbitrariamente il valore di 4 variabili tra quelle disponibili indicate in precedenza.

Ad esempio possiamo assegnare il valore di 4 variabili: F_i, T_i, F, Q ed integrare il sistema ODE nelle variabili h e T.

Se modifichiamo il valore delle 4 variabili assegnate si otterranno nuovi andamenti dinamici delle variabili h e T.

<u>Quindi, se vogliamo che h e T cambino secondo una specifica dinamica, sarà necessario non avere alcun grado di libertà all'interno del sistema.</u>

N.B.: al fine di specificare un sistema in modo completo, il numero di gradi di libertà dovrà essere nullo.

Gradi di libertà di un processo

Se definiamo f la differenza tra il numero di **variabili** e di **equazioni**:

$$f = V - E$$

si potrà avere:

- $f = 0$ → il sistema è **perfettamente specificato**;
- $f > 0$ → il sistema è **sottodimensionato** nel senso che mancano f equazioni per ottenere un'unica soluzione;
- $f < 0$ → ci sono più equazioni che variabili (il sistema è **sovradimensionato**) e in generale non esiste una soluzione alle equazioni proposte.

N.B.: la presenza di un <u>anello di controllo</u> introduce un'equazione aggiuntiva tra le variabili misurate e manipolate e quindi <u>riduce di un'unità</u> il numero di gradi di libertà.

Gradi di libertà di un processo

N.B.: nel caso del serbatoio riscaldato e perfettamente miscelato il numero di gradi di libertà risulta pari a 4 se e solo se la portata liquida uscente F è regolata da una pompa o da una valvola. Al contrario se la portata uscente F dipendesse dal battente di liquido nel serbatoio:

$$F = c_D A_{tubo} \sqrt{2gh}$$

allora il numero di gradi di libertà si ridurrebbe a 3.

Gradi di libertà e controllabilità di un processo

In genere un sistema modellato correttamente ed attentamente possiede uno o più gradi di libertà.

Quindi, nel caso di $f > 0$ il processo avrà un'infinità di soluzioni.

Domanda: Come occorre procedere per ridurre il numero di gradi di libertà a zero al fine di avere un sistema completamente specificato e quindi caratterizzato da un comportamento univoco?

Per aggiungere equazioni e portare il sistema a $f = 0$ è possibile agire in due modi distinti:

- tramite il **mondo esterno**
- tramite il **sistema di controllo**

Gradi di libertà e controllabilità di un processo

Tornando al caso del serbatoio riscaldato e perfettamente miscelato occorre aggiungere 4 relazioni.

F_i e T_i sono due disturbi che sono *specificati* dal mondo esterno (anche se le rispettive equazioni possono non essere note ma comunque esistono). Sicché il numero di gradi di libertà si riduce a 2.

A fini controllistici il serbatoio funziona correttamente se il livello e la temperatura sono mantenuti ad un valore opportuno. Ciò può essere conseguito tramite l'introduzione di 2 anelli di controllo che corrispondono a 2 equazioni in più.

Alla fine il numero di gradi di libertà risulta nullo (cioè $f = 0$).

N.B.: attenzione a non *sovraspecificare* il sistema nella definizione/assegnazione degli anelli di controllo altrimenti il sistema complessivo non risulta adeguatamente controllabile.

Gradi di libertà e controllabilità di un processo

Nel caso specifico, avendo assunto F_i e T_i variabili definite dal mondo esterno (ad esempio disturbi) restano come variabili manipolate F e Q per controllare h e T.

Riassumendo il bilancio totale variabili-equazioni vede:

- **6 variabili**: F_i, T_i, F, T, h, Q
- **2 equazioni differenziali**: $dh/dt = \ldots$ e $dT/dt = \ldots$
- **2 equazioni** definite dal **mondo esterno** relative ai disturbi: F_i, T_i
- **2 equazioni di controllo** su h e T basate sulla manipolazione delle restanti variabili di processo: F e Q.

Gradi di libertà e controllabilità di un processo

Abbiamo così definito due possibili anelli di controllo basati sulle variabili manipolate F e Q per controllare le variabili di output h e T.

In un'ottica di controllo convenzionale ove un **anello di controllo** è costituito da **una variabile manipolata** ed **una variabile controllata**, resta da definire l'accoppiamento tra le due variabili manipolate e le due variabili controllate.

<u>L'accoppiamento tra variabili manipolate e variabili controllate</u> viene definito in inglese con il termine: ***pairing***.

Un pairing molto ragionevole risulta essere: $\{F, h\}$ e $\{Q, T\}$.

In numerosi altri casi il *pairing* non è a priori definito ed univoco ma è possibile prevedere permutazioni tra variabili manipolate e controllate.

N.B.: *Pairing* differenti conducono ad interazioni processistiche tra le variabili controllate differenti e quindi ad una controllabilità del processo più o meno elevata.

Ambiti della modellazione per il controllo

Prima di procedere con la modellazione di un processo occorre essere in grado di rispondere alle seguenti domande:

- quali sono gli **obiettivi del controllo** che occorre soddisfare?
- quali sono i **disturbi attesi** ed il loro **impatto** sul processo?
- quali sono i **fenomeni fisici e chimici dominanti** che avvengono nel processo da controllare?

Rispondere a queste domande permette di identificare:

- le variabili di stato;
- le variabili di input (manipolate e disturbi);
- le variabili di output da controllare:
  - $x = \text{setpoint}$
  - $\text{low} < x < \text{up}$