Prof. Davide Manca – Politecnico di Milano

Dinamica e Controllo dei Processi Chimici

Esercitazione #5

Identificazione di modello

ing. Sara Brambilla

Identificazione di modello

Nel definire un modello black box, gli output (y) del sistema sono calcolati a partire dai dati di input (u) e dalla storia passata (y_{old}, u_{old}):

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_{old}, \mathbf{u}_{old}\right)$$

In generale, per avere un modello che sia il più fedele possibile alla realtà si introducono dei parametri adattivi (p):

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_{old}, \mathbf{u}_{old}, \mathbf{p}\right)$$

Si può introdurre nel modello anche l'errore (e) definito come y_{real}-y:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_{old}, \mathbf{u}_{old}, \mathbf{e}_{old}, \mathbf{p}\right)$$

Identificazione di modello

Il sistema da identificare assume la forma:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{f}\Big[y_1(t-1),\ldots,y_1\left(t-n_{y_1}\right),\ldots,y_r(t-1),\ldots,y_r\left(t-n_{y_r}\right),$$
$$u_1(t-1),\ldots,u_1\left(t-n_{u_1}\right),\ldots,u_m(t-1),\ldots,u_m\left(t-n_{u_m}\right),$$
$$e_1(t-1),\ldots,e_1\left(t-n_{e_1}\right),\ldots,e_r(t-1),\ldots,e_r\left(t-n_{e_r}\right)\Big]$$

Il vettore φ è il vettore dei regressori:

$$\varphi(t)=\Big[y_1(t-1),\ldots,y_1\left(t-n_{y_1}\right),\ldots,y_r(t-1),\ldots,y_r\left(t-n_{y_r}\right),$$
$$u_1(t-1),\ldots,u_1\left(t-n_{u_1}\right),\ldots,u_m(t-1),\ldots,u_m\left(t-n_{u_m}\right),$$
$$e_1(t-1),\ldots,e_1\left(t-n_{e_1}\right),\ldots,e_r(t-1),\ldots,e_r\left(t-n_{e_r}\right)\Big]^T$$

Identificazione di modello

La funzione **f**, tramite i parametri **p**, mappa il vettore dei regressori nelle variabili di output **y:**

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}\left[\varphi(t), \mathbf{p}\right]$$

La funzione **f** più semplice è:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{p} \times \varphi(t)$$

vettore riga vettore colonna

I modelli matematici possono avere struttura scalare, vettoriale e mista:

- **SISO**: Single Input – Single Output
- **MISO**: Multiple Input – Single Output
- **MIMO**: Multiple Input – Multiple Output

Procedura di identificazione

1. Determinazione dei limiti del sistema e delle variabili necessarie
2. Progettazione della sperimentazione
3. Selezione della struttura del modello
4. Determinazione dei parametri
5. Simulazione e convalida

Procedura di identificazione

1. **Determinazione dei limiti del sistema e delle variabili necessarie**
   - Si definisce l'esatto numero di variabili di input (u) e di output (y)
   - Si individua anche il range di variabilità delle stesse al fine di creare un opportuno dominio di apprendimento per la fase successiva di identificazione

2. **Progettazione della sperimentazione**
   - Una volta individuate le variabili occorre definire la frequenza di campionamento
   - È opportuno che tutte le variabili di input siano disturbate

Procedura di identificazione

3. Selezione della struttura del modello

- Occorre definire:
  - la lunghezza del vettore dei regressori
  - l'ordine del modello rispetto ad ogni variabile
  - la linearità o non linearità del modello rispetto i regressori ed i parametri

4. Determinazione dei parametri

- Occorre definire l'algoritmo numerico necessario alla determinazione dei parametri del modello
- Occorre distinguere tra modelli:
  - Deterministici (minimizzazione dell'errore commesso)
  - Stocastici (metodo della massima verosimiglianza)

Procedura di identificazione

5. Simulazione e convalida

- Una volta identificato il modello occorre testare la sua capacità predittiva e quindi la sua bontà utilizzando un insieme di dati che non siano già stati usati

- La procedura di convalida del modello si basa su di un insieme di dati di convalida (cross-validation set) opportunamente scelto a priori e mantenuto distinto dall'insieme di addestramento (learning set)

Generazione di sequenze di disturbo

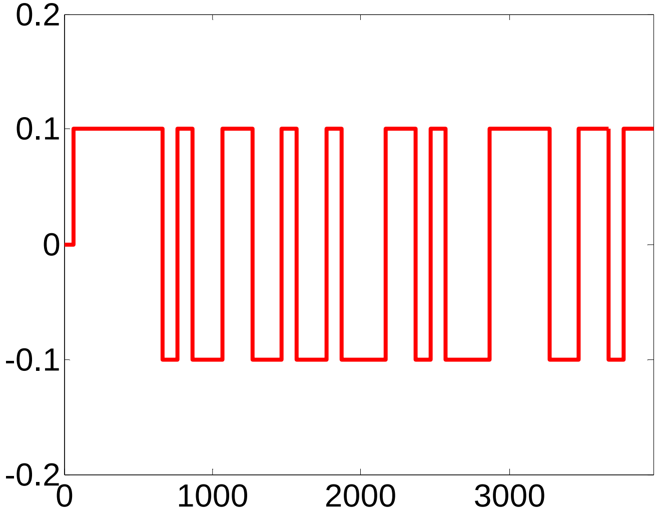
- La raccolta dei dati di input-output per le procedure di identificazione e di convalida avviene disturbando le variabili di input del processo

- Si utilizza il metodo **PRBS** (Pseudo Random Binary Sequence):
  - Si scelgono due estremi di banda, uMIN, uMAX, per la variabilità della grandezza u da disturbare
  - Si varia in modo random il suo valore. La variabile può assumere solo i valori estremi
  - Si misura in corrispondenza il vettore di output

Sequenze PRBS

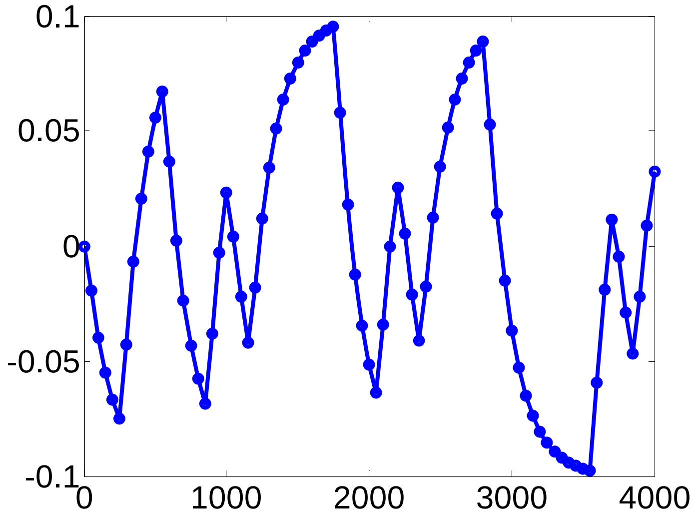
1. Le variabili di input possono assumere solo due valori, uguali in ampiezza ma di segno opposto, $\pm\Delta u$, rispetto alle condizioni stazionarie
2. Il passaggio da una condizione positiva a quella negativa, e viceversa, avviene in modo random al fine di dare alla sequenza la caratteristica di rumore bianco (media nulla)
3. Il disturbo sulle variabili di input viene effettuato ogni n tempi di campionamento (t_s = sampling time)
4. Di solito l'intervallo $n \times t_s$ è pari al 20% del tempo richiesto al sistema per esaurire il transitorio
5. L'ampiezza Δu del disturbo deve essere sufficientemente elevata da eliminare i disturbi di misurazione dovuti al rumore del sistema

Generazione di sequenze di disturbo



Sequenza di disturbo

Variabile di output



Pretrattamento dei dati

- All’atto dell’acquisizione dei dati dal campo è possibile applicare degli opportuni **operatori matematici** in grado di smorzare le eccessive oscillazioni (ad esempio media mobile)
- È possibile applicare dei **filtri** taglia alto, taglia basso per cancellare variazioni improvvise oltre i normali intervalli di operatività
- È possibile eliminare i cosiddetti **outlier** tramite opportune tecniche di analisi statistica
- **DETREND**: ai dati viene tolto il valore medio. In tal modo le variabili campionate esprimono lo scostamento dai valori di stazionario o comunque dalle condizioni operative medie. È così possibile utilizzare il modello (a costo di risultati mediocri) anche per altri stati stazionari

Modelli ARX

CARATTERISTICHE

- Il modello ARX è lineare sia nei regressori che nei parametri
- Come tale non è in grado di descrivere più stati stazionari
- Per definizione non può descrivere comportamenti non lineari
- La sua identificazione è relativamente semplice
- I tempi di calcolo per una predizione sono estremamente ridotti

Modelli ARX - SISO

Modello **SISO**:

$$y(t)+a_1\,y(t-1)+a_2\,y(t-2)+\ldots+a_{n_y}\,y\left(t-n_{n_y}\right)=$$
$$=b_1\,u(t-1)+b_2\,u(t-2)+\ldots+b_{n_u}\,u(t-n_u)$$

Per effettuare una predizione servono n_y valori della variabile dipendente (*y*) e n_u valori della variabile indipendente (*u*).

Esempio: Stima con 3 tempi all'indietro sia per la variabile indipendente che per la variabile dipendente

$$y(t)+a_1\,y(t-1)+a_2\,y(t-2)+a_3\,y(t-3)=$$
$$=b_1\,u(t-1)+b_2\,u(t-2)+b_3\,u(t-3)$$

Modelli ARX - MIMO

Modello **MIMO**:

Esempio: Sistema caratterizzato da:

- 3 variabili indipendenti (u)
- 2 variabili dipendenti (y)
- 4 tempi all'indietro

$$
\begin{aligned}
y(t) &+ a_1 y_1(t-1) + a_2 y_1(t-2) + a_3 y_1(t-3) + a_4 y_1(t-4) + \\
&+ a_5 y_2(t-1) + a_6 y_2(t-2) + a_7 y_2(t-3) + a_8 y_2(t-4) = \\
&= b_1 u_1(t-1) + b_2 u_1(t-2) + b_3 u_1(t-3) + b_4 u_1(t-4) + \\
&+ b_5 u_2(t-1) + b_6 u_2(t-2) + b_7 u_2(t-3) + b_8 u_2(t-4) + \\
&+ b_9 u_3(t-1) + b_{10} u_3(t-2) + b_{11} u_3(t-3) + b_{12} u_3(t-4)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 8 + 12 = 20 parametri

Determinazione dei parametri (SISO)

Note le seguenti misure effettuate sul sistema reale → Si potrebbero determinare diversi set di parametri

$$\varphi = \left[y(t-1) \quad y(t-2) \quad \dots \quad y(t-n_y) \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad \dots \quad u(t-n_u) \right]^T$$

$$y(t)$$

$$y(t) = \mathbf{p} \times \varphi(t)$$

$$p_1 = \left[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_y} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_u} \right]$$

Primo set di parametri

$$\varphi = \left[y(t) \quad y(t-1) \quad \dots \quad y(t-n_y+1) \quad u(t) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_u+1) \right]^T$$

$$y(t+1)$$

$$y(t) = \mathbf{p} \times \varphi(t)$$

$$p_2 = \left[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_y} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_u} \right]$$

Secondo set di parametri

Determinazione dei parametri

Volendo determinare quale sia il miglior set di parametri, si deve ottimizzare una funzione obiettivo

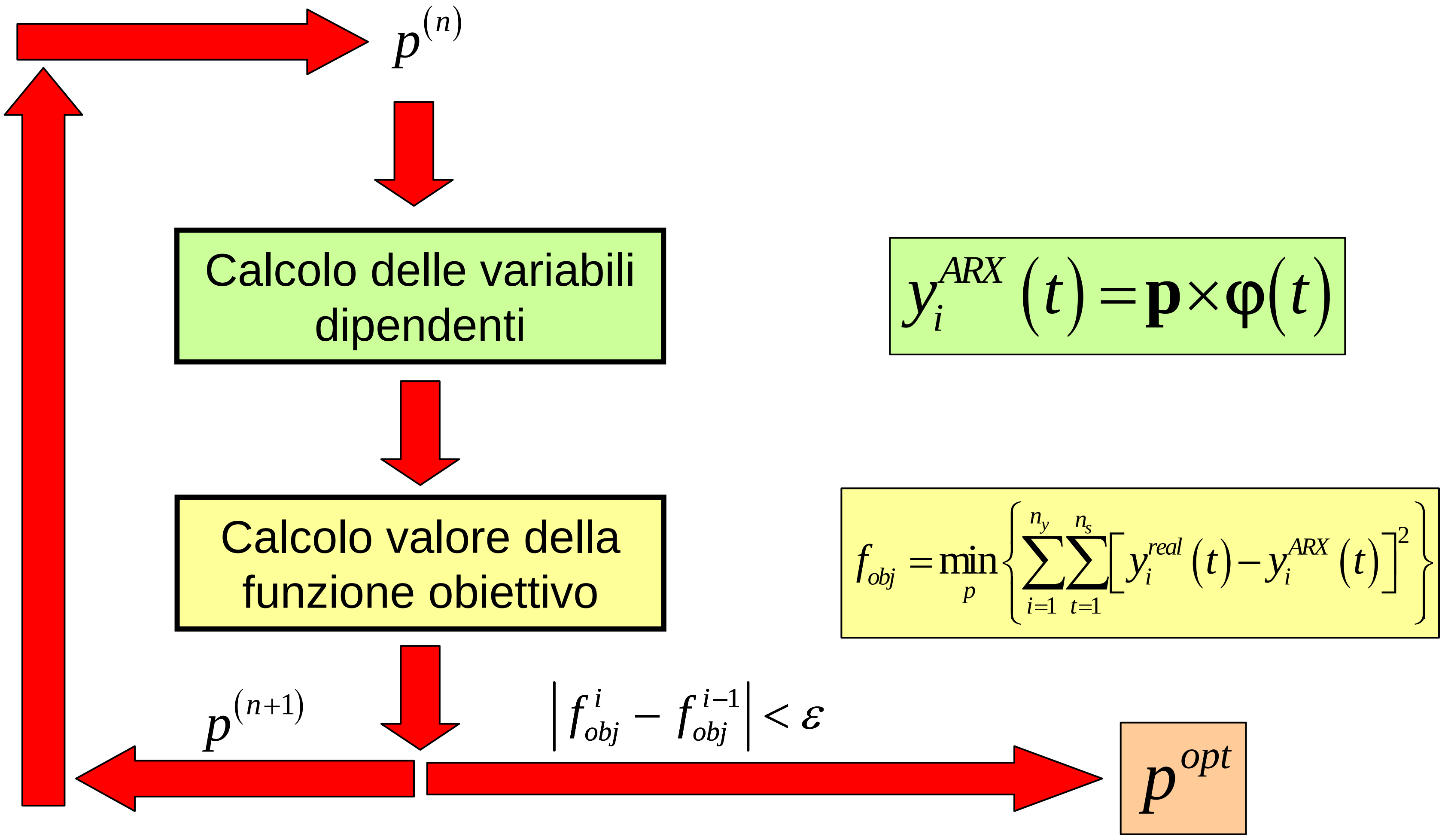
$\Rightarrow$ Metodo dei minimi quadrati

$$f_{obj} = \min_{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{t=1}^{n_s} \left[y_i^{real}(t) - f_i\left(\varphi(t), \mathbf{p}\right) \right]^2 \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$f_{obj} = \min_{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{t=1}^{n_s} \left[y_i^{real}(t) - y_i^{ARX}(t) \right]^2 \right\}$$

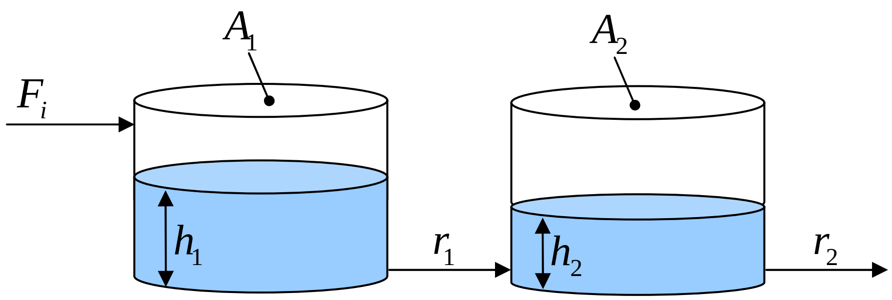
Determinazione dei parametri



Esercitazione

- Sia considerino due serbatoi interagenti
- Si determinino i parametri di un modello ARX considerando che la variabile indipendente sia la portata in ingresso e che la variabile dipendente sia l'altezza del secondo serbatoio
- Per il calcolo della variabile dipendente al tempo t, si considerino 2 valori passati sia della variabile indipendente che di quella dipendente
- Si consideri, inoltre, che la variabile indipendente varia intorno al valore di stazionario (assegnato) di ±10%

Modello del sistema



$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dh_1}{dt} = F_i - \dfrac{h_1 - h_2}{r_1} \\ A_2 \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1 - h_2}{r_1} - \dfrac{h_2}{r_2} \end{cases}$$

Dati: $F_i = 10 \ \mathrm{m^3/s}$

Serbatoio 1:	Serbatoio 2:
$A_1 = 40 \ \mathrm{m^2}$	$A_2 = 30 \ \mathrm{m^2}$
$r_1 = 0.9 \ \mathrm{s/m^2}$	$r_2 = 2.1 \ \mathrm{s/m^2}$

CI: $h_1(0) = h_1^{(s)}$

$h_2(0) = h_2^{(s)}$

Procedura risolutiva

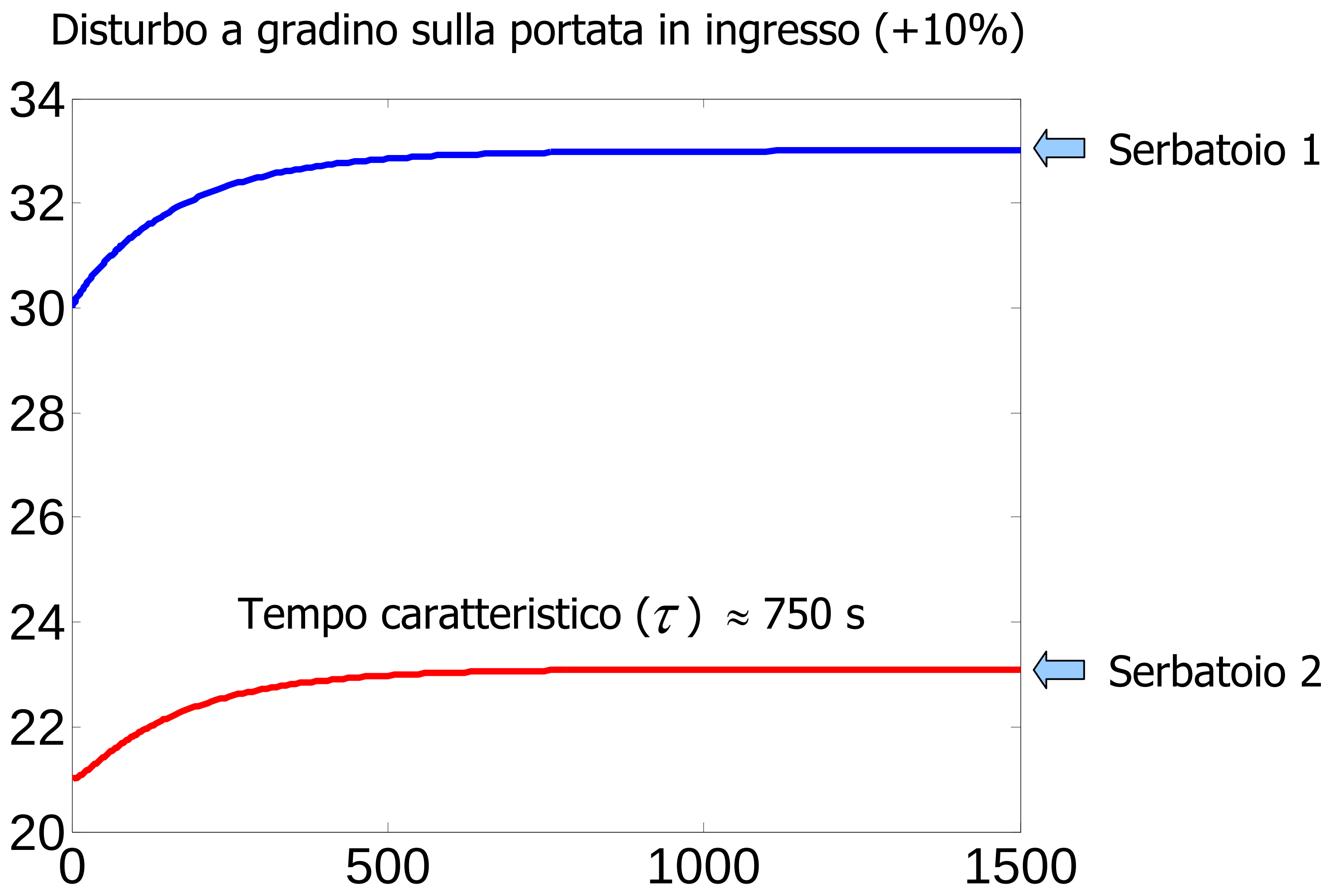
1. Determinare le condizioni stazionarie

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{dh_1}{dt} = 0 = F_i - \dfrac{h_1 - h_2}{r_1} \\ A_2 \dfrac{dh_2}{dt} = 0 = \dfrac{h_1 - h_2}{r_1} - \dfrac{h_2}{r_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1^{(s)} = \left(r_1 + r_2\right) F_i \\ h_2^{(s)} = r_2 F_i \end{cases}$$

2. Dare un disturbo al sistema per valutare il tempo caratteristico (es. +10% F_i)

3. Valutare la dinamica del sistema secondo il metodo PRBS

Valutazione del tempo caratteristico



Determinazione dei tempi

- Intervallo tra due disturbi (t_d):

$$t_d = 0.2\tau = 150 \text{ s}$$

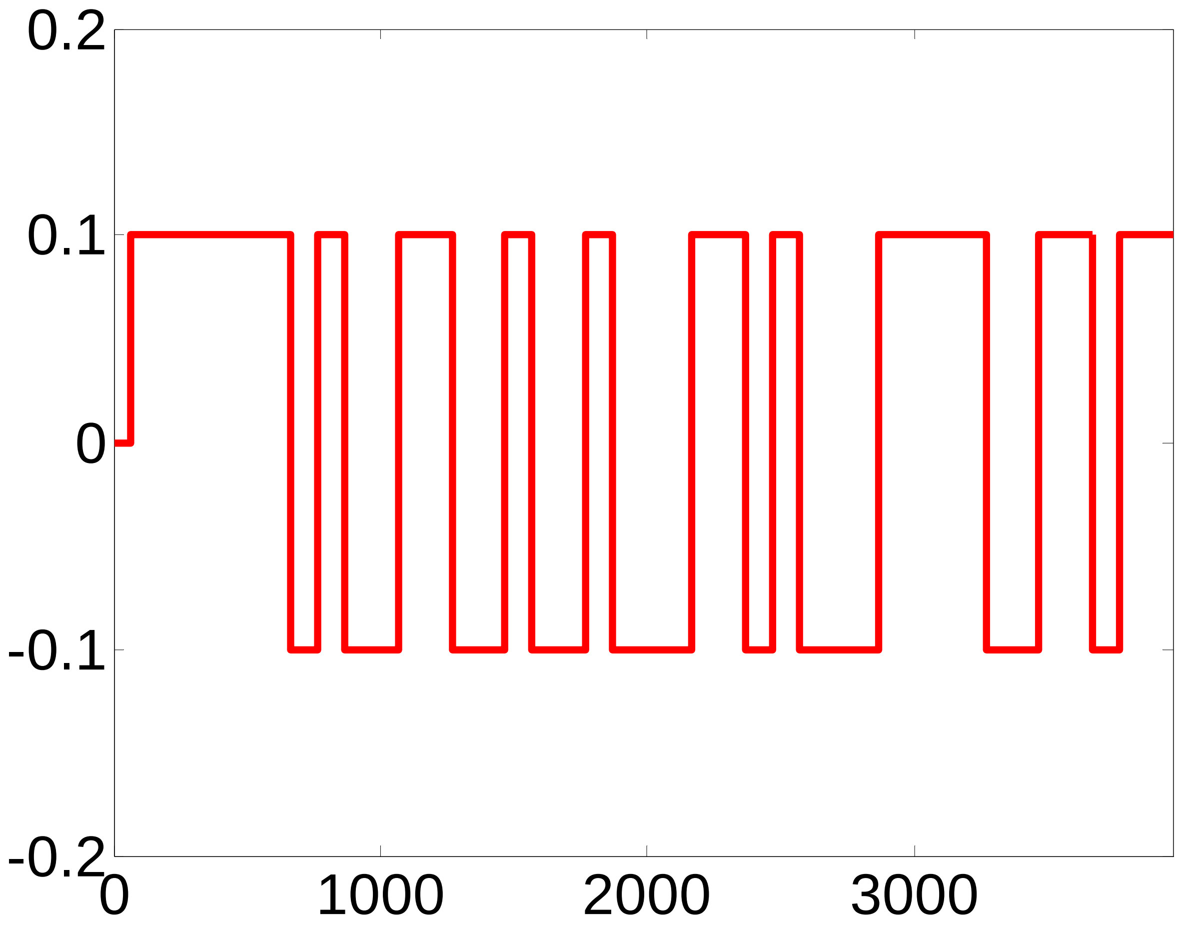
- Tempo di campionamento (t_s):

$$t_s = t_d / 3 = 50 \text{ s}$$

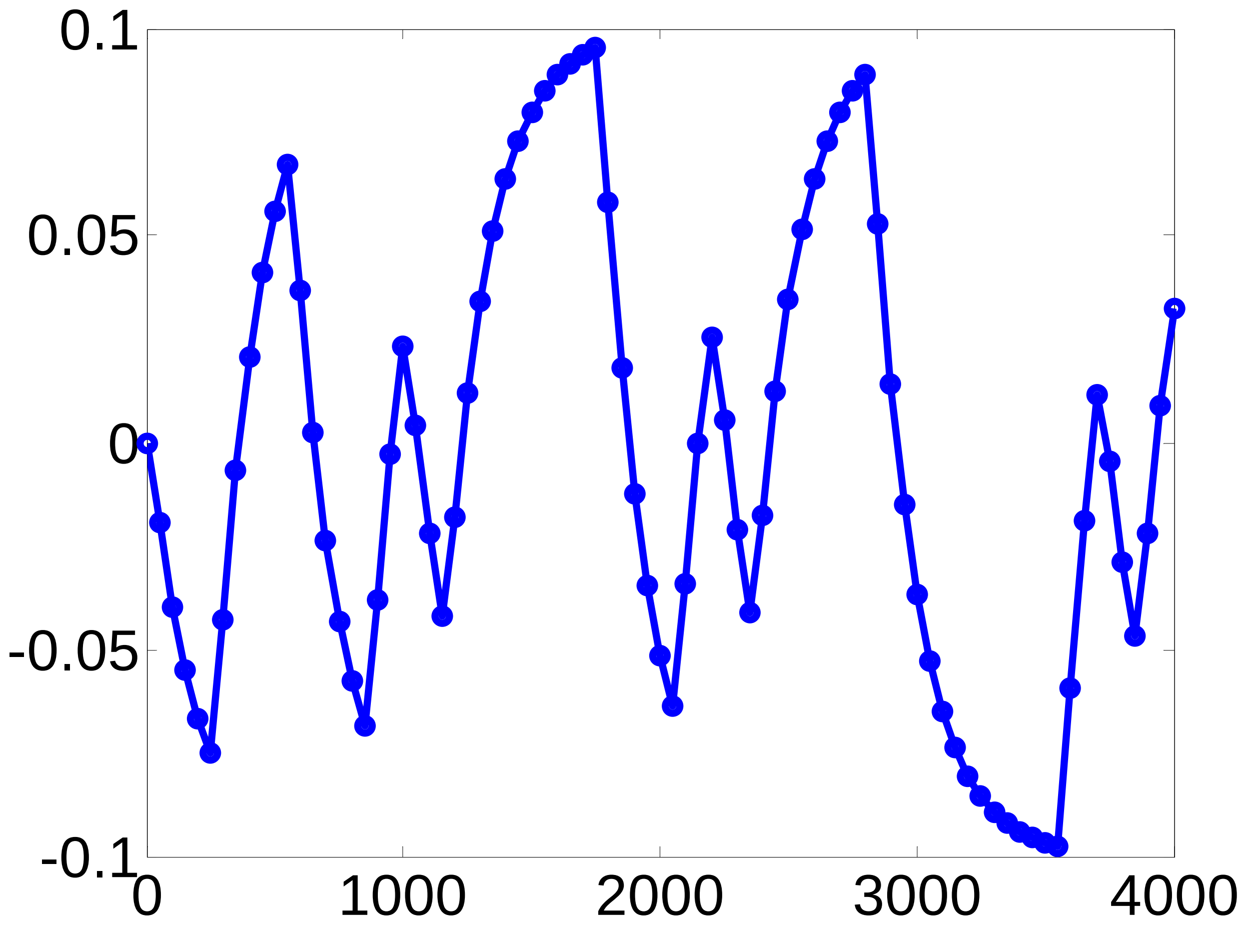
Implementazione in MatLab

```
for i = 1 : nPassi
   cont = cont + 1;
   if(cont == 3)
      randNum = rand();
      if(randNum <= 0.5)
           Fi = Fi0 * 1.1;
      else
           Fi = Fi0 * 0.9;
      end
    cont = 0;
    end
    … valutazione della dinamica del sistema
end
```

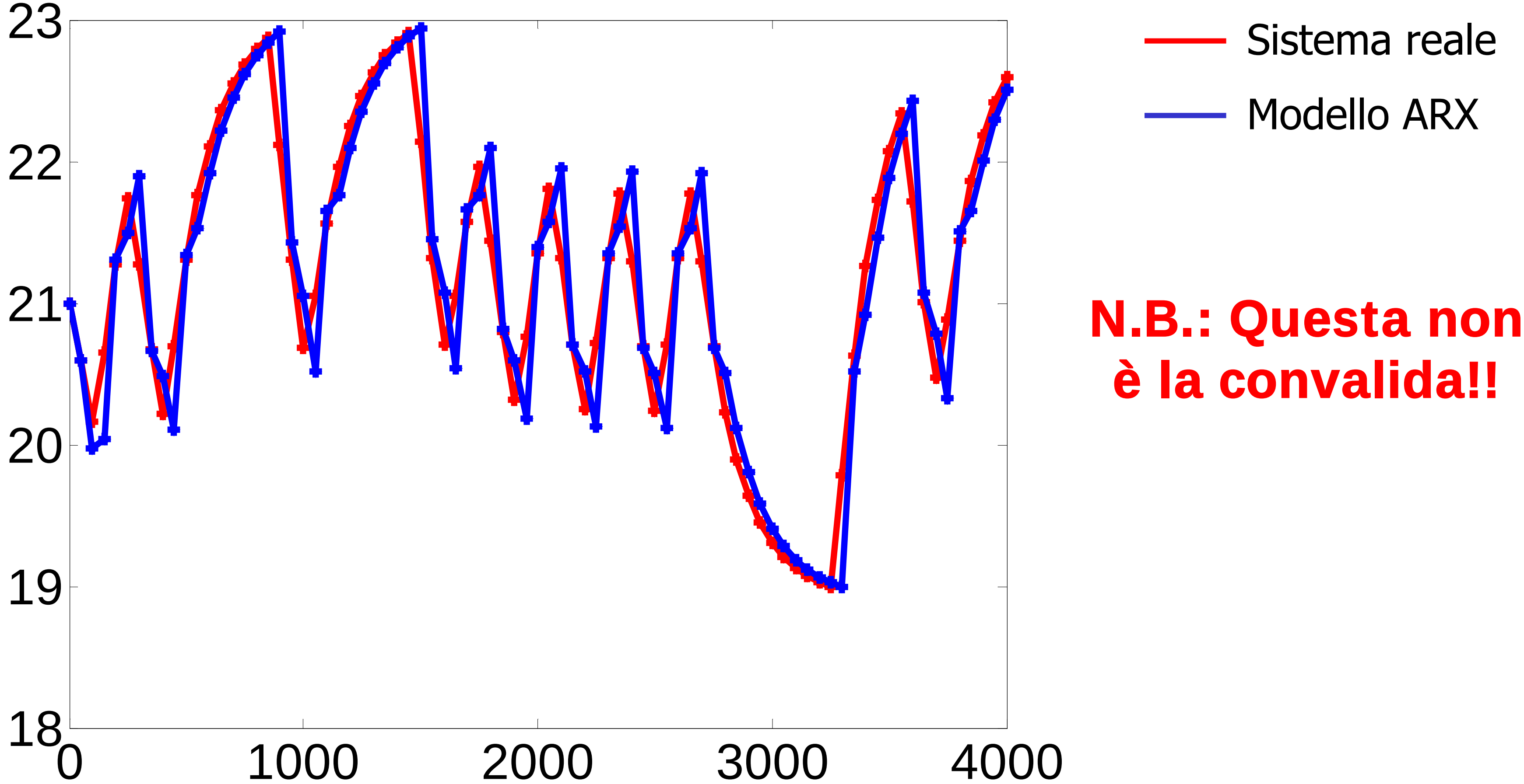
Sequenza di disturbo



Risposta del sistema reale



Prestazioni ARX



N.B.: Questa non è la convalida!!

Convalida ARX