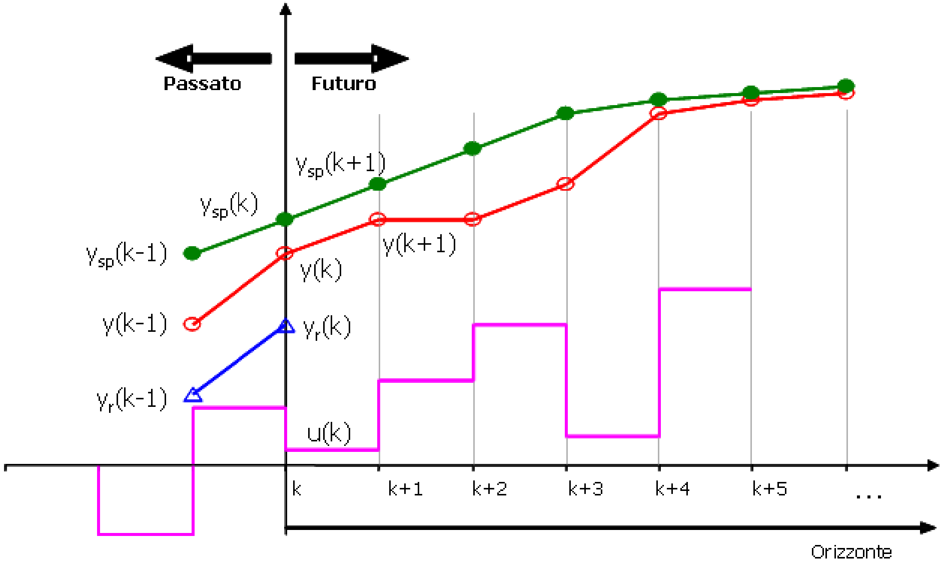
Model Predictive Control



Introduzione

- I tipici processi industriali sono in genere complessi, hanno numerosi input ed output nonché disturbi e producono elevate quantità in continuo o discontinuo.
- Esistono in aggiunta dei vincoli economici ed ambientali che dettano delle condizioni relative alla:
  - qualità dei prodotti
  - utilizzo dell'energia
  - sicurezza industriale e dell'ambiente
- Spesso i dati relativi alla qualità del prodotto finale non sono disponibili o misurabili in linea.
- Quando poi si abbiano dei frequenti cambiamenti della qualità/specifiche/grado del prodotto finale occorre che l'impianto operi in condizioni non stazionarie.
- A ciò si aggiunge la necessità di effettuare procedure di avvio e spegnimento (anche di emergenza).

Introduzione

- I tipici processi industriali sono quindi caratterizzati dai seguenti problemi di controllo:
  1. Il processo è quasi sempre multivariabile
     - numerose variabili controllate: $y_1, y_2, \ldots, y_n$
     - numerose variabili manipolate: $u_1, u_2, \ldots, u_n$
     - numerose variabili disturbate: $d_1, d_2, \ldots, d_n$
  2. Comportamento dinamico complesso
     - *time delays* (tempi di ritardo) dovuti all'inerzia del sistema (materiale ed energetica), trasporto materiale all'interno dei tubi, lunghi tempi di misura ed analisi
     - risposta inversa
     - possibile instabilità ad anello aperto

Introduzione

3. Non linearità intrinseca del sistema
4. Vincoli operativi differenziati ed articolati
    - vincoli sulle variabili di input e di output
    - vincoli sulla velocità di cambiamento delle variabili di input
    - vincoli sul valore ottimale delle variabili di input (*e.g.*, valore economico)
    - vincoli processistici o di legge
    - vincoli hard e soft

Introduzione al controllo basato su modello

Un sistema di controllo ideale dovrebbe:

- essere multivariabile e gestire tempi di ritardo, risposta inversa, vincoli, disturbi misurati e non misurabili
- ottimizzare lo sforzo controllistico
- essere in grado di inferenziare dalle misure disponibili quelle non disponibili
- essere robusto rispetto agli errori di modellazione ed al rumore delle misure
- essere in grado di gestire gli *startup* e gli *shutdown* (programmati e di emergenza) come pure gli stazionari dell'impianto

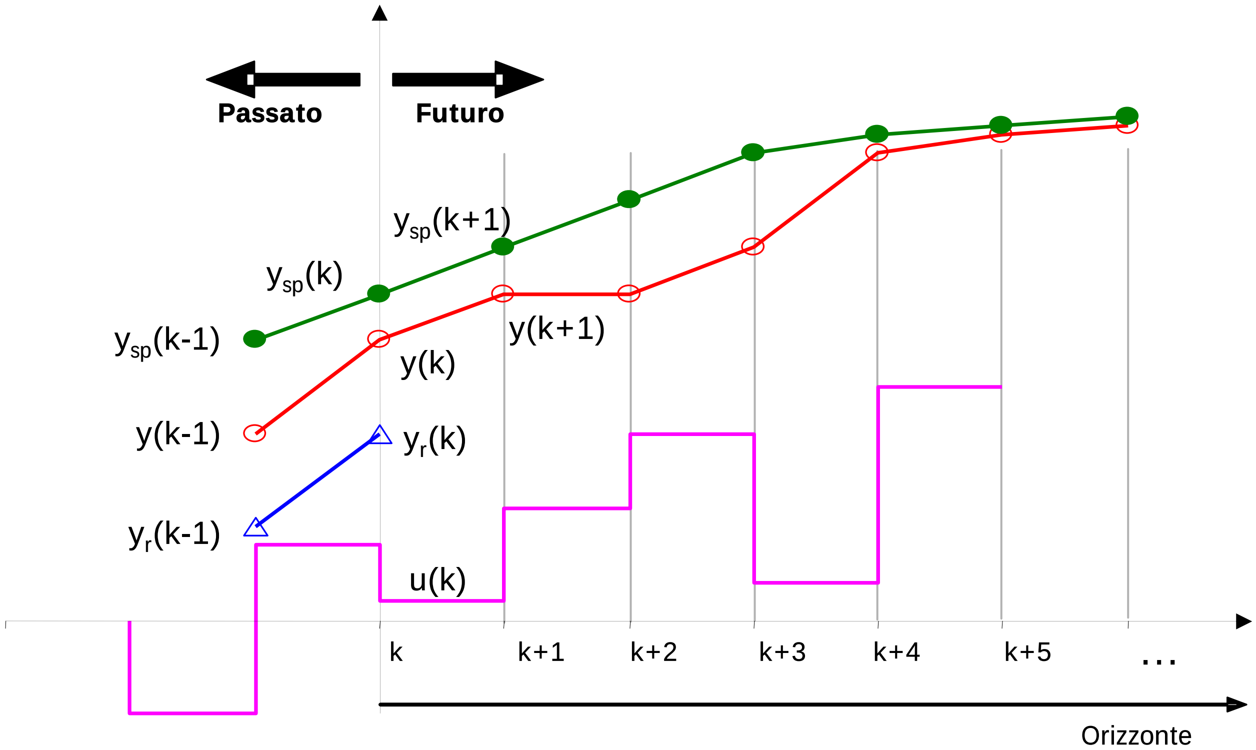
Controllo basato su modello

- Il primo controllo di tipo MPC nasce in ambito industriale nel 1978 con un articolo di Richalet e coautori e nel 1979 con dei lavori pubblicati dalla Shell.
- In quegli anni si inizia a parlare di *model based control*.
- Le principali tappe evolutive sono:
    - DMC: Dynamic Matrix Control 1979, (processi Shell) Cutler & Ramaker, Prett & Gilette
        - Applicazione ad un'unità di *fluid catalytic cracking*
    - MAC: *Model Algorithmic Control* → commercializzato come IDCOM

Applicabilità del MPC

- Non tutti i processi produttivi richiedono l'utilizzo di una strategia di controllo di tipo **M**odel **P**redictive **C**ontrol: **MPC**.
- In genere i processi che più sono adatti ad una logica di tipo MPC sono caratterizzati da:
  - Più variabili di input e output con notevoli interazioni tra i singoli loop di controllo
  - Un numero uguale o differente di variabili di input/output (*i.e.* rispettivamente sistemi quadratici o rettangolari)
  - Dinamiche complesse ed articolate
  - Vincoli sulle variabili di input e output

Applicabilità del MPC



y_{sp} = y set point (traiettoria del sp)

y = y modello

y_r = y reale, misurata

u = variabile manipolata

Elementi caratteristici del MPC

- Traiettoria di riferimento del sistema, set point ottimale variabile nel tempo: y_{sp}
- Risposta del modello predittivo, y. Risposta nel futuro: $y(k+1), y(k+2), \ldots$ a fronte degli input presenti e passati : $u(k), u(k-1), u(k-2), \ldots$
- Il modello $\mathbf{M}$ viene utilizzato per calcolare una sequenza di atti di controllo che soddisfano una opportuna funzione obiettivo:
  - minimizzazione della risposta del sistema y rispetto alla traiettoria: y_{sp} ottimale o di set point
  - minimizzare lo sforzo controllistico

Elementi caratteristici del MPC

- Ciò corrisponde a determinare una sorta di modello inverso $\mathbf{M}^*$, che fornisce la sequenza ottimale $u(k), u(k+1),\ldots, u(k+m-1)$

  N.B.: in realtà non si determina un modello inverso $\mathbf{M}^*$ bensì si risolve numericamente un problema di ottimo.

- Stima dell'errore ε attuale esistente tra modello $\mathbf{M}$ e realtà $\mathbf{R}$:

$$\varepsilon_k = y_r(k) - y(k)$$

  e suo utilizzo per le previsioni future.

Formalizzazione matematica del MPC

$$\min_{\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k+1),\ldots,\mathbf{u}(k+h_c-1)} \left\{ \sum_{j=k+1}^{k+h_p} \left[\boldsymbol{\omega}_y \mathbf{e}_y^2(j) + \mathbf{PF}_y(j) \right] + \sum_{i=k}^{k+h_p-1} \left[\boldsymbol{\omega}_u \Delta\mathbf{u}^2(i) + \mathbf{PF}_u(i) \right] + \sum_{l=k}^{k+h_p-1} \boldsymbol{\omega}_T \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_T^2(l) \right\}$$

$$\mathbf{e}_y(j) = \frac{\left[\mathbf{y}(j) + \boldsymbol{\delta}_y(k)\right] - \mathbf{y}_{sp}(j)}{\mathbf{y}_{sp}(j)} \qquad \boldsymbol{\delta}_y(k) = \mathbf{y}_r(k) - \mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_{real}(k) - \mathbf{y}_{model}(k)$$

$$\mathbf{PF}_y(j) = \left\{ Max\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}_{MAX}}{\mathbf{y}_{MAX}} \right] \right\}^2 + \left\{ Min\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}_{MIN}}{\mathbf{y}_{MIN}} \right] \right\}^2$$

$$\Delta\mathbf{u}(i) = \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}(i-1)}{\mathbf{u}(i-1)} \qquad \Delta\mathbf{u}_{MIN} \le \Delta\mathbf{u}(i) \le \Delta\mathbf{u}_{MAX}$$

$$\mathbf{PF}_u(i) = \left\{ Max\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_{MAX}}{\mathbf{u}_{MAX}} \right] \right\}^2 + \left\{ Min\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_{MIN}}{\mathbf{u}_{MIN}} \right] \right\}^2$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_T(l) = \mathbf{u}(l) - \mathbf{u}_T(l)$$

$$s.t. \begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{d},t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{y}',\mathbf{y},\mathbf{u},\mathbf{d},t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Formalizzazione matematica del MPC

$$\min_{\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k+1),\ldots,\mathbf{u}(k+h_c-1)} \left\{ \ldots \right\}$$

Formalizzazione matematica del MPC

$$\min_{\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k+1),\ldots,\mathbf{u}(k+h_c-1)} \left\{ \sum_{j=k+1}^{k+h_p} \left[\boldsymbol{\omega}_y \mathbf{e}_y^2(j) + \mathbf{PF}_y(j) \right] + \ldots \right\}$$

$$\mathbf{e}_y(j) = \frac{\left[\mathbf{y}(j) + \boldsymbol{\delta}_y(k)\right] - \mathbf{y}_{sp}(j)}{\mathbf{y}_{sp}(j)} \qquad \boldsymbol{\delta}_y(k) = \mathbf{y}_r(k) - \mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_{real}(k) - \mathbf{y}_{model}(k)$$

$$\mathbf{PF}_y(j) = \left\{ Max\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}_{MAX}}{\mathbf{y}_{MAX}} \right] \right\}^2 + \left\{ Min\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}_{MIN}}{\mathbf{y}_{MIN}} \right] \right\}^2$$

Formalizzazione matematica del MPC

$$\min_{\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k+1),\dots,\mathbf{u}(k+h_c-1)} \left\{ \dots + \sum_{i=k}^{k+h_p-1} \left[\boldsymbol{\omega}_u \Delta\mathbf{u}^2(i) + \mathbf{PF}_u(i) \right] + \dots \right\}$$

$$\Delta\mathbf{u}(i) = \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}(i-1)}{\mathbf{u}(i-1)} \qquad \Delta\mathbf{u}_{MIN} \le \Delta\mathbf{u}(i) \le \Delta\mathbf{u}_{MAX}$$

$$\mathbf{PF}_u(i) = \left\{ Max\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_{MAX}}{\mathbf{u}_{MAX}} \right] \right\}^2 + \left\{ Min\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_{MIN}}{\mathbf{u}_{MIN}} \right] \right\}^2$$

In genere $\Delta\mathbf{u}_{MIN}$ è negativo

Formalizzazione matematica del MPC

$$\min_{\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k+1),\ldots,\mathbf{u}(k+h_c-1)} \left\{ \ldots + \ldots + \sum_{l=k}^{k+h_p-1} \boldsymbol{\omega}_T \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_T^2(l) \right\}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_T(l) = \mathbf{u}(l) - \mathbf{u}_T(l)$$

$T =$ target, può coincidere con il valore di steady state OTTIMALE delle variabili manipolate (*e.g.*, condizioni nominali operative)

Formalizzazione matematica del MPC

$$\min_{\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k+1),\ldots,\mathbf{u}(k+h_c-1)} \left\{ \sum_{j=k+1}^{k+h_p} \left[\boldsymbol{\omega}_y \mathbf{e}_y^2(j) + \mathbf{PF}_y(j) \right] + \sum_{i=k}^{k+h_p-1} \left[\boldsymbol{\omega}_u \Delta\mathbf{u}^2(i) + \mathbf{PF}_u(i) \right] + \sum_{l=k}^{k+h_p-1} \boldsymbol{\omega}_T \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_T^2(l) \right\}$$

$$\mathbf{e}_y(j) = \frac{\left[\mathbf{y}(j) + \boldsymbol{\delta}_y(k) \right] - \mathbf{y}_{sp}(j)}{\mathbf{y}_{sp}(j)} \qquad \boldsymbol{\delta}_y(k) = \mathbf{y}_r(k) - \mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_{real}(k) - \mathbf{y}_{model}(k)$$

$$\mathbf{PF}_y(j) = \left\{ Max\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}_{MAX}}{\mathbf{y}_{MAX}} \right] \right\}^2 + \left\{ Min\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}_{MIN}}{\mathbf{y}_{MIN}} \right] \right\}^2$$

$$\Delta\mathbf{u}(i) = \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}(i-1)}{\mathbf{u}(i-1)} \qquad \Delta\mathbf{u}_{MIN} \le \Delta\mathbf{u}(i) \le \Delta\mathbf{u}_{MAX}$$

$$\mathbf{PF}_u(i) = \left\{ Max\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_{MAX}}{\mathbf{u}_{MAX}} \right] \right\}^2 + \left\{ Min\left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}_{MIN}}{\mathbf{u}_{MIN}} \right] \right\}^2$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_T(l) = \mathbf{u}(l) - \mathbf{u}_T(l)$$

$$s.t. \begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{d}, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{y}', \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{d}, t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Elementi critici del MPC

h_c

h_p

ω_y

ω_u

ω_T

$\delta_y\left(k\right)$

$y = y_{model}$

Δu

u_T