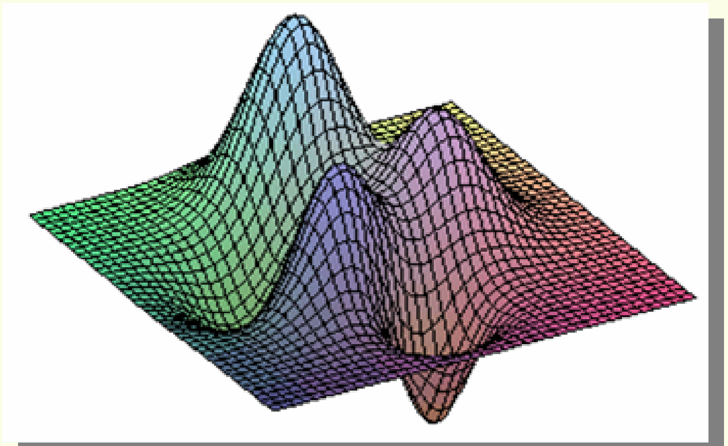
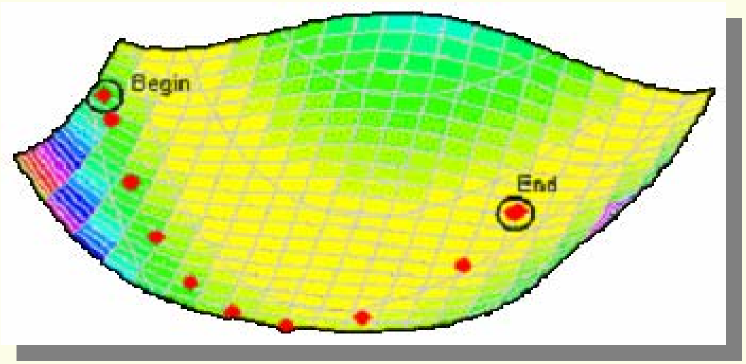
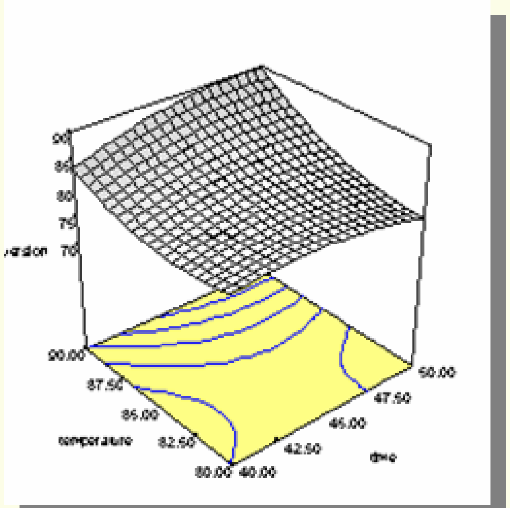
L6

Ottimizzazione monodimensionale







Prologo

È possibile affermare che tutta l'attività professionale dell'ingegnere orbiti intorno all'**ottimizzazione**.

Esistono numerosi indirizzi nell'ambito dei quali applicare l'ottimizzazione:

- progettazione delle apparecchiature,
- *layout* ottimale di un processo,
- individuazione delle condizioni operative nominali ottimali,
- conduzione e controllo in linea di processo,
- supervisione di processo su uno o più siti produttivi,
- ottimizzazione della catena produttiva,
- logistica dell'approvvigionamento e distribuzione,
- allocazione ottimale delle risorse umane nell'ambito dell'attività lavorativa,
- conseguimento di ottimi economici, energetici, riduzione degli inquinanti, riduzione dell'impatto ambientale, ...
- ecc.

Prologo

Esempio: si desidera determinare lo spessore ottimale s di isolante per un tubo di grande diametro ed elevato coefficiente di scambio termico interno. Occorre trovare un compromesso tra risparmio energetico conseguito e costo di investimento da effettuare per la posa del refrattario.

Svolgimento

- Calore scambiato con l'esterno in presenza di refrattario [kcal/h]:

$$Q = UA\Delta T = \frac{A\Delta T}{\frac{1}{h_e} + \frac{s}{k}}$$

- Costo di installazione del refrattario [€/m²]: $F_0 + F_1 s$

- L'isolante ha una vita di 5 anni. Il capitale per l'acquisto e la posa in opera viene preso in prestito da una banca. Si indica con r la percentuale del capitale + interessi da restituire ogni anno. Quindi: $r > 0.2$
- H_t è il costo dell'energia dispersa [€/kcal]
- Y sono le ore di esercizio in un anno [h/y]
- Ogni anno occorre restituire alla banca [€/y]: $\left(F_0 + F_1 s\right) Ar$

Prologo

- Calore scambiato con l'esterno senza refrattario [kcal/h]:

$$Q = UA\Delta T = h_e A\Delta T$$

- Risparmio energetico annuo dovuto al refrattario [€/y]:

$$\left[h_e A\Delta T - A\Delta T / \left(1/h_e + s/k\right)\right] H_t Y$$

- Ne consegue che la funzione obiettivo nel gdl s diviene:

$$f_{obj} = \left[h_e A\Delta T - A\Delta T / \left(1/h_e + s/k\right)\right] H_t Y - \left(F_0 + F_1 s\right) Ar$$

- In questo caso il problema è risolubile analiticamente ponendo: $\frac{df_{obj}}{ds} = 0$
- Si ottiene:

$$\boxed{s_{opt} = k\left(\sqrt{\frac{\Delta T H_t Y}{k F_1 r}} - \frac{1}{h_e}\right)}$$

- Si noti che s_{opt} non dipende né da A né da F_0 viceversa f_{obj} dipende da tali grandezze.

Ottimizzazione

Nel campo dell'ottimizzazione si distingue tra problemi **monodimensionali** e problemi **multidimensionali**.

- Nel primo caso si cerca l'ottimo di una funzione obiettivo dipendente da una sola variabile (un grado di libertà).

- Nel secondo caso si cerca l'ottimo di una funzione obiettivo dipendente da più variabili (più gradi di libertà).

Nel prosieguo si affronterà la discussione di metodi numerici volti alla risoluzione di problemi di **ottimo monodimensionale**.

N.B.: gli algoritmi di ricerca monodimensionale sono utilizzabili per la ricerca lungo una specifica direzione di miglioramento nell'ottimizzazione multidimensionale. In realtà gli algoritmi moderni multidimensionali adottano metodi di ricerca monodimensionale sequenziale specificatamente sviluppati e volti alla riduzione puntuale del numero di chiamate di funzione (ad esempio metodi SQP: Successive Quadratic Programming).

Ottimizzazione monodimensionale

In un problema di ottimizzazione monodimensionale occorre quindi identificare il valore della variabile x (detta anche grado di libertà) che rende ottima la funzione obiettivo $f(x)$.

L'ottimo del problema può essere rappresentato dal **massimo** o dal **minimo** della funzione obiettivo.

$$\text{Max } f(x) \qquad\qquad \text{Min } g(x)$$

I due problemi sono assolutamente equivalenti. Infatti è sufficiente cambiare di segno alla funzione obiettivo per passare da un problema di minimo ad uno di massimo e viceversa:

$$\text{Max } f(x) \equiv \text{Min } -f(x)$$
$$\text{Min } g(x) \equiv \text{Max } -g(x)$$

Nel prosieguo si considereranno soltanto problemi di **minimo** di funzioni.

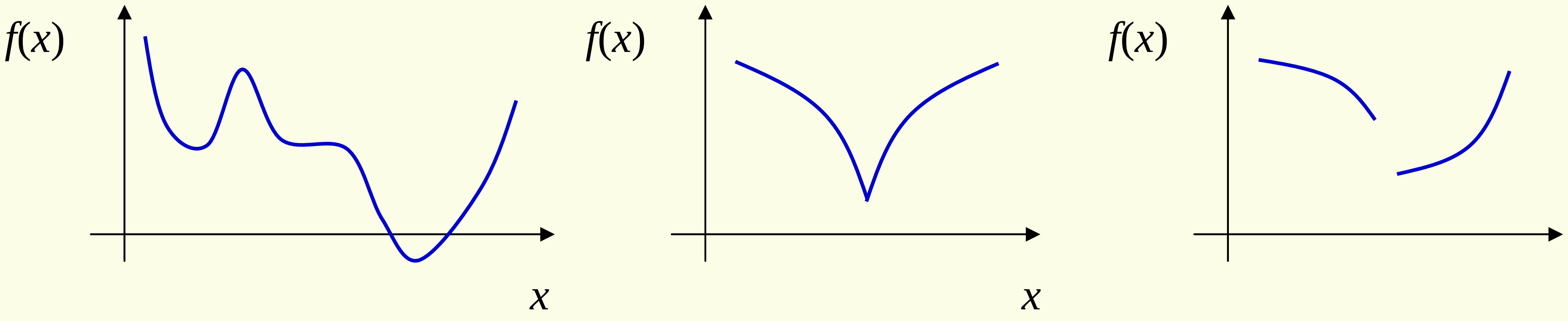
Ottimizzazione monodimensionale

Utilizzando in modo **non corretto** le conoscenze di analisi classica si potrebbe pensare che per risolvere il problema:

$$\text{Min } f(x)$$

sia sufficiente risolvere il problema equivalente: $\dfrac{df(x)}{dx} = 0$

Niente di più sbagliato. Si rammenta che la condizione summenzionata è necessaria per identificare un punto estremante di una funzione continua e derivabile. Tale condizione però non copre casi specifici quali ad esempio:



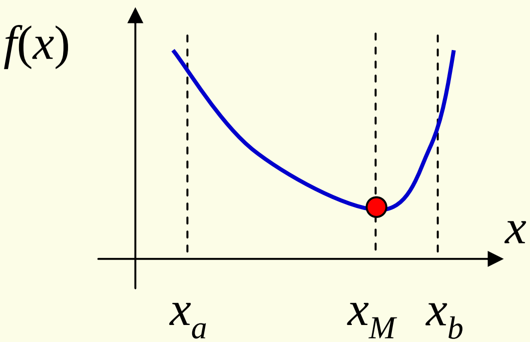
Funzione unimodale

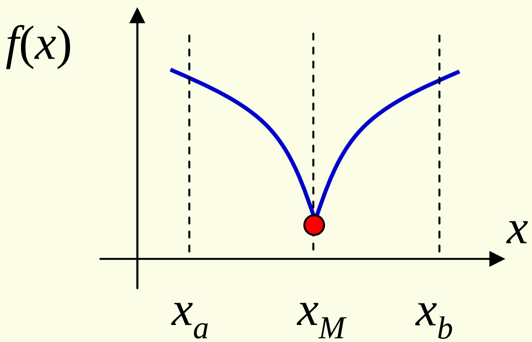
Definizione: una funzione viene detta **unimodale** in un intervallo $[x_a, x_b]$ se esiste **un solo punto di minimo** x_M appartenente a tale intervallo.

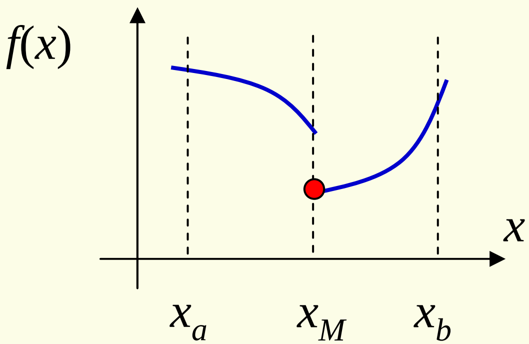
N.B.: nella definizione di funzione unimodale **non** vengono fatte ipotesi di continuità o di derivabilità della funzione.

N.B.: una funzione che presenti più punti di minimo o che sia costante e minima anche in un sottointervallo non è unimodale.

Esempi di funzioni unimodali:





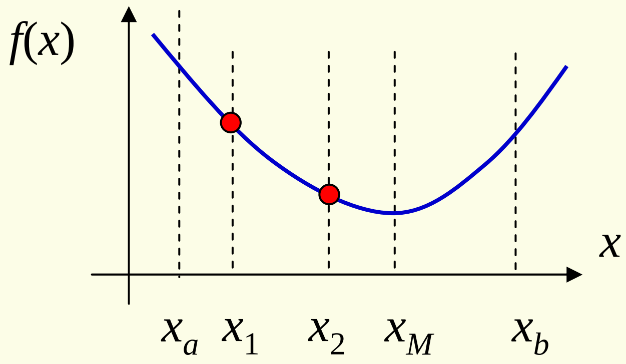


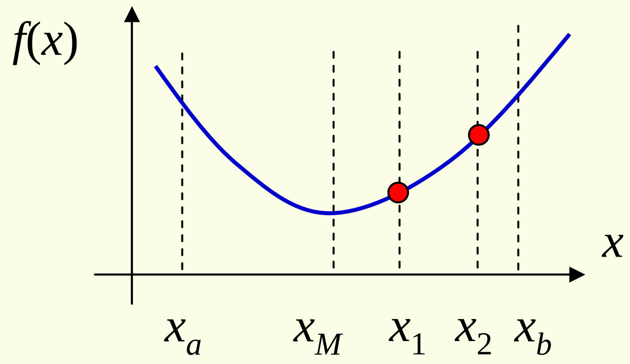
Intervallo di incertezza

Definizione: l'intervallo $[x_a, x_b]$ all'interno del quale la funzione è unimodale è detto **intervallo di incertezza**.

Definizione: Una funzione è **unimodale** nell'intervallo di incertezza $[x_a, x_b]$ se dati due punti x_1 e x_2 con $x_a < x_1 < x_2 < x_b$ si ha <u>contemporaneamente</u> che:

$$\begin{cases} \bullet \text{ ponendo } x_2 < x_M \text{ risulta } f(x_1) > f(x_2) \\ \bullet \text{ ponendo } x_1 > x_M \text{ risulta } f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$$





Riduzione intervallo di incertezza

Corollario: data una funzione **unimodale** nell'intervallo $[x_a, x_b]$ e due punti x_1 e x_2 con $x_a < x_1 < x_2 < x_b$ è possibile ridurre l'intervallo di incertezza $[x_a, x_b]$ nel seguente modo:

- se $f(x_1) < f(x_2)$ l'intervallo di incertezza diventa: $[x_a, x_2]$
- se $f(x_1) > f(x_2)$ l'intervallo di incertezza diventa: $[x_1, x_b]$
- se $f(x_1) = f(x_2)$ l'intervallo di incertezza diventa: $[x_1, x_2]$

N.B.: numericamente può accadere che la funzione non risulti unimodale anche se lo è teoricamente (a livello di analisi classica) nell'intervallo $[x_a, x_b]$. Ciò accade quando i punti x_1, x_2 sono troppo vicini e forniscono lo stesso valore della funzione obiettivo anche se al loro interno non cade il punto di minimo.

Intervallo di definizione

Definizione: la distanza δ minima al di sotto della quale la funzione cessa di essere numericamente unimodale viene detta **intervallo di definizione**.

Stima dell'ordine di grandezza dell'intervallo di definizione δ

Si supponga che la funzione $f(x)$ approssimi l'andamento di una parabola in un opportuno intorno del punto di minimo: x_M. Allora si ha:

$$f(x) \approx f(x_M) + \frac{1}{2!}(x - x_M)^2 f''(x_M)$$

La parabola approssima la funzione in x_M se il termine $\frac{1}{2!}(x - x_M)^2 f''(x_M)$

è trascurabile rispetto a $f(x_M)$. Indicando con ε il macheps, ciò accade se:

$$\left| \frac{1}{2!}(x - x_M)^2 f''(x_M) \right| < \left| \varepsilon f(x_M) \right|$$

ovvero se: $\left| x - x_M \right| \approx \delta < \sqrt{\varepsilon}\, x_M \sqrt{\left| \frac{2 f(x_M)}{x_M^2 f''(x_M)} \right|}$

Intervallo di definizione

Si noti che l'intervallo di definizione, ovvero l'intervallo all'interno del quale cade il punto di minimo della funzione obiettivo, può essere determinato con una precisione proporzionale alla **radice quadrata del *macheps***.

Al contrario nel caso dell'azzeramento di una funzione si è già visto che l'intervallo di definizione all'interno del quale cade la soluzione del problema è confrontabile con il *macheps*.

Da ciò si deduce che la precisione di un metodo di azzeramento è intrinsecamente maggiore di quella conseguibile con un metodo di minimizzazione.

N.B.: la radice quadrata del macheps è un numero maggiore del macheps stesso. Ad esempio in singola precisione: $\varepsilon = 1.1920928\text{E}-7$
mentre: $\sqrt{\varepsilon} = 3.4526698\text{E}-4$

Classificazione metodi risolutivi

Nella ottimizzazione monodimensionale di funzioni è possibile individuare due famiglie di metodi risolutivi:

- **Metodi di confronto**: si sfruttano soltanto confronti tra valori della funzione obiettivo.

- **Metodi di approssimazione**: si approssima la funzione obiettivo con altre funzioni più semplici e si cerca il punto di ottimo di tali funzioni.

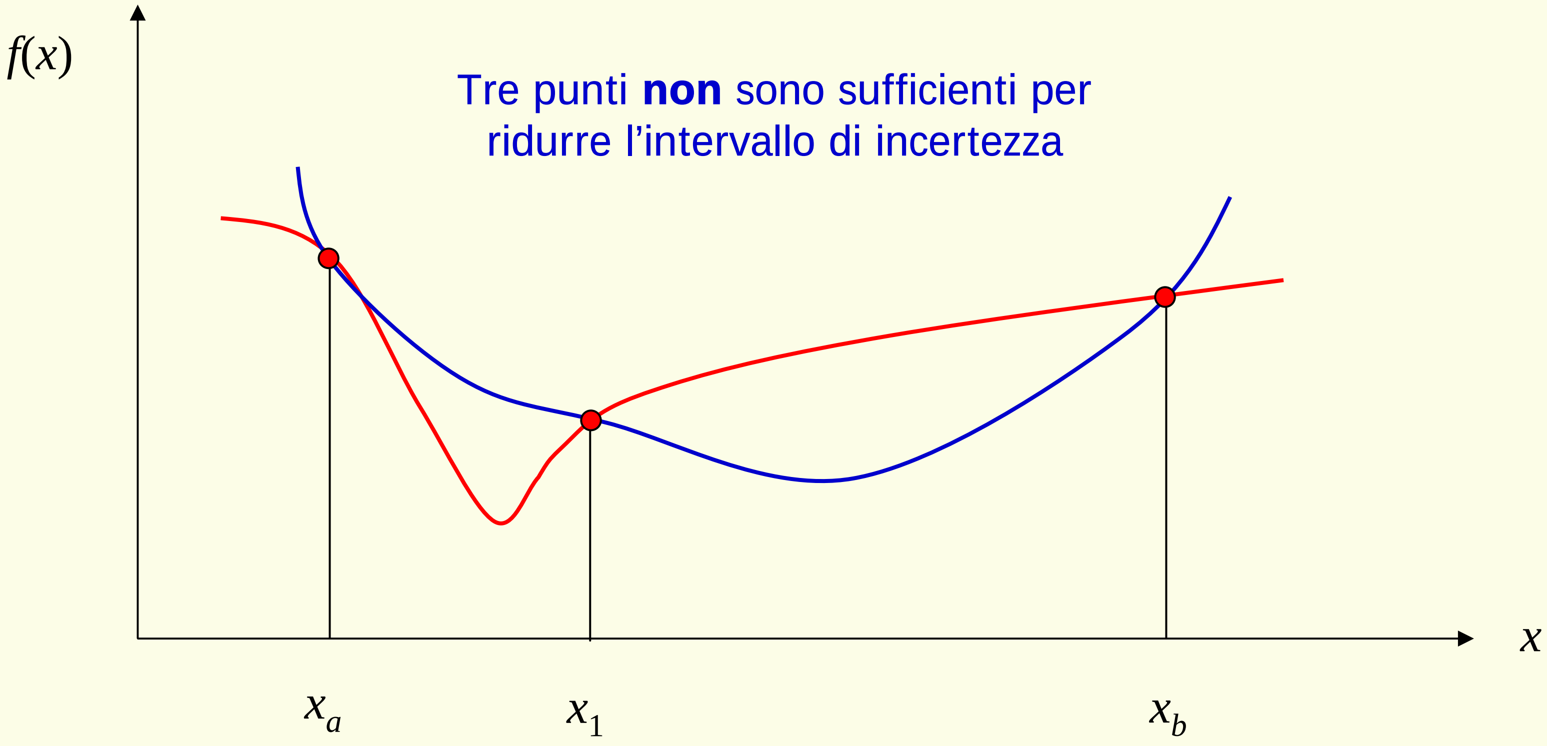
Esiste anche un'altra possibile classificazione:

Metodi sequenziali: la valutazione della funzione obiettivo viene condotta sequenzialmente. Ogni valutazione permette di decidere quale azione successiva intraprendere.

Metodi paralleli: è possibile eseguire più valutazioni di funzione prima di prendere una decisione sulla strategia successiva. In generale questi metodi richiedono molti più calcoli di funzione. Sono interessanti nel caso di utilizzo su computer multiprocessore.

Riduzione dell’intervallo di incertezza

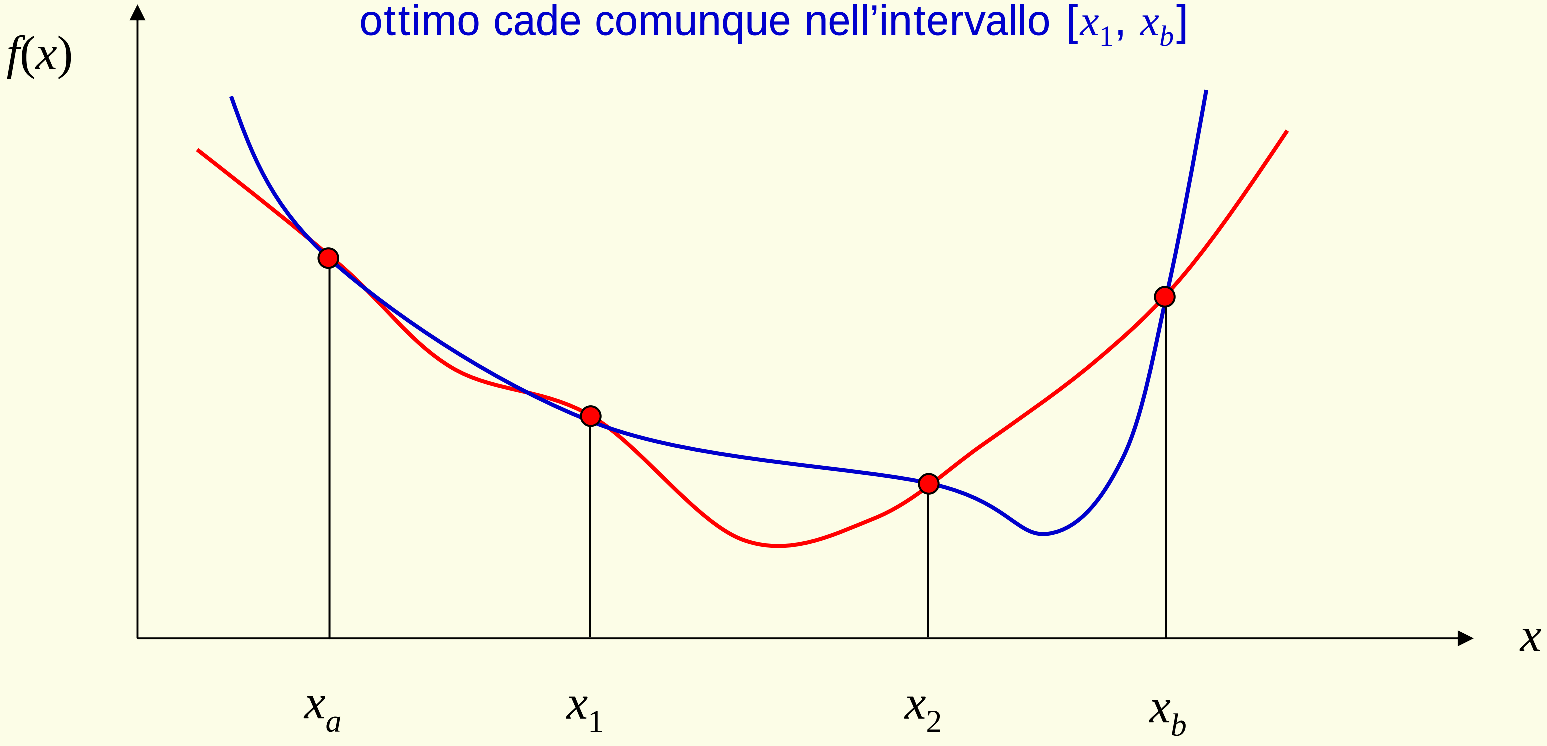
Domanda: sapendo che una funzione è **unimodale** entro un certo intervallo quanti punti sono necessari per ridurre l’intervallo di incertezza nel caso di ottimo monodimensionale?



Riduzione dell'intervallo di incertezza

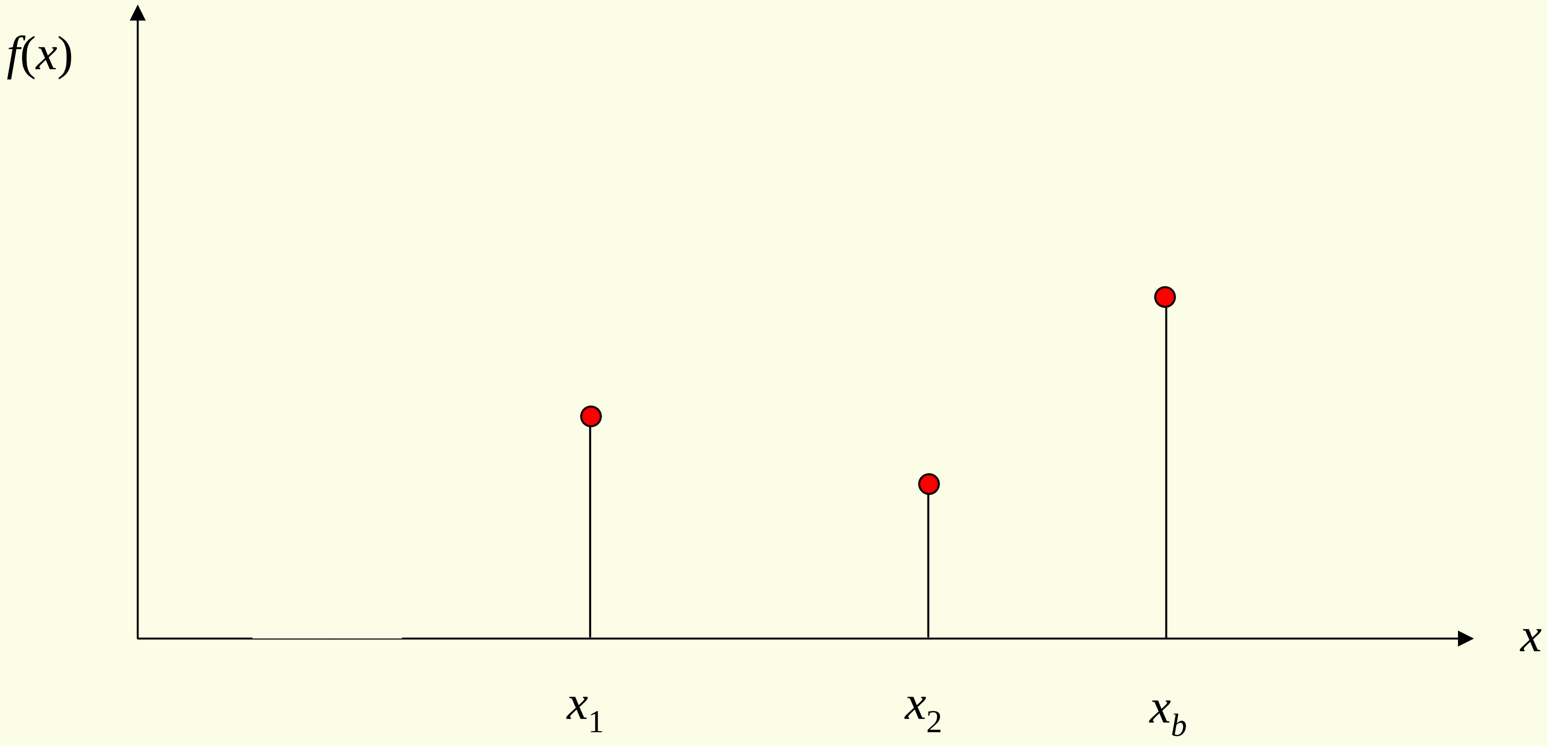
È necessario aggiungere un **quarto** punto interno all'intervallo di incertezza

Ora è possibile affermare che il punto di ottimo cade comunque nell'intervallo $[x_1, x_b]$



Riduzione dell'intervallo di incertezza

È quindi possibile eliminare x_a. Il nuovo intervallo ha già tre punti a disposizione. Occorre quindi aggiungere un solo nuovo punto all'interno dell'intervallo attuale di incertezza per procedere con le iterazioni.



Riduzione dell'intervallo di incertezza

Problema: come conviene posizionare i primi due punti interni e quelli successivi affinché, dopo un assegnato numero di iterazioni, risulti **minimo il massimo** intervallo finale di incertezza?

La semantica indica che occorre risolvere un problema **MiniMax**.

Se si cerca di risolvere il problema con un **approccio diretto** la soluzione non è affatto banale.

Viceversa è relativamente facile risolvere il problema cercando di individuare quali saranno le **condizioni finali** della sequenza iterativa.

Riduzione dell'intervallo di incertezza

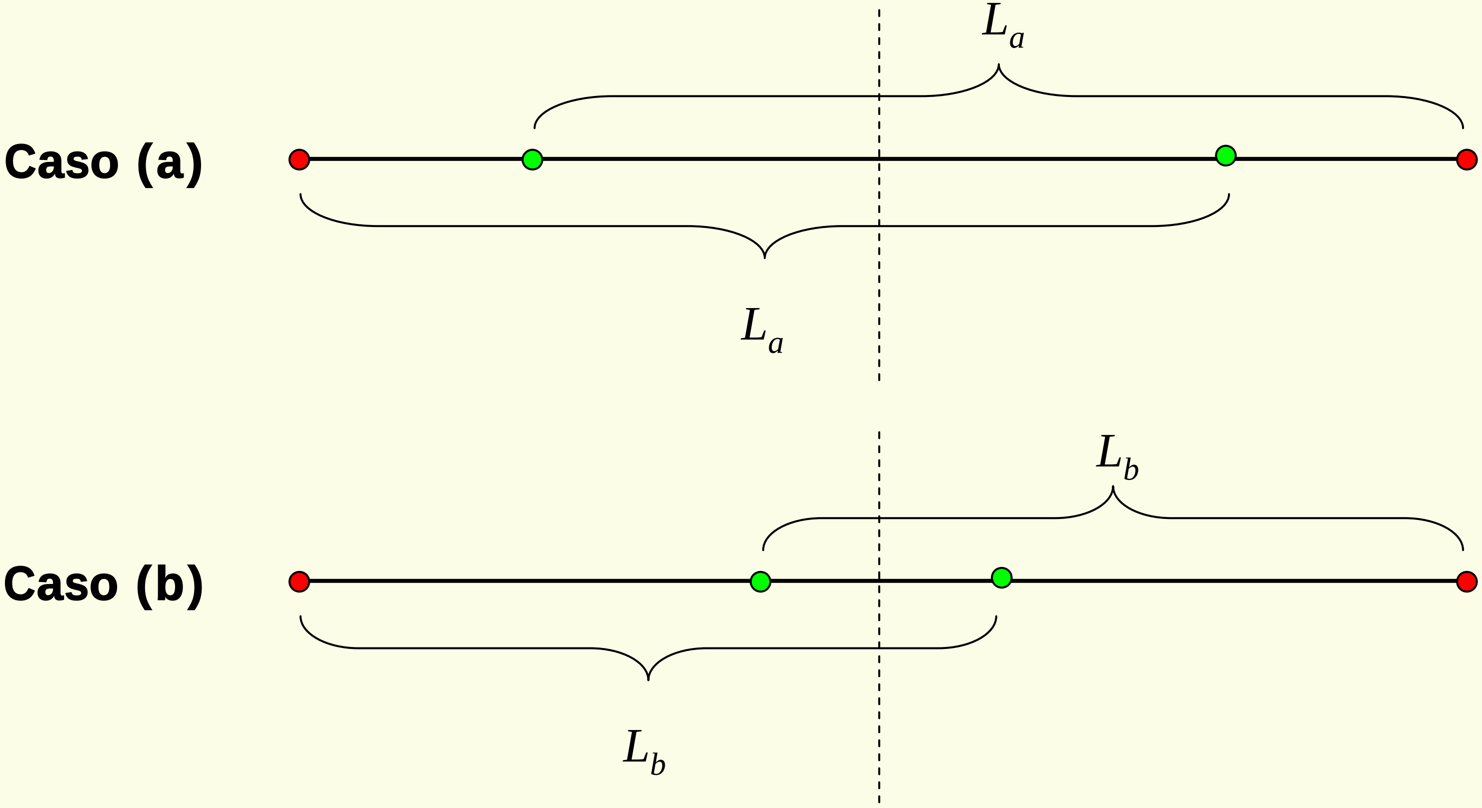
Alla fine del processo iterativo, per poter prendere l'ultima decisione, dovremo basarci comunque su due prove.

Domanda: qual è la scelta ottimale che rende minimo il massimo intervallo finale di incertezza con due prove?

Risposta: questo problema è facile da risolvere. Le due prove devono essere simmetriche all'interno dell'intervallo (perché altrimenti non minimizzerebbero il massimo intervallo di incertezza finale) e il più possibile vicine fra loro.

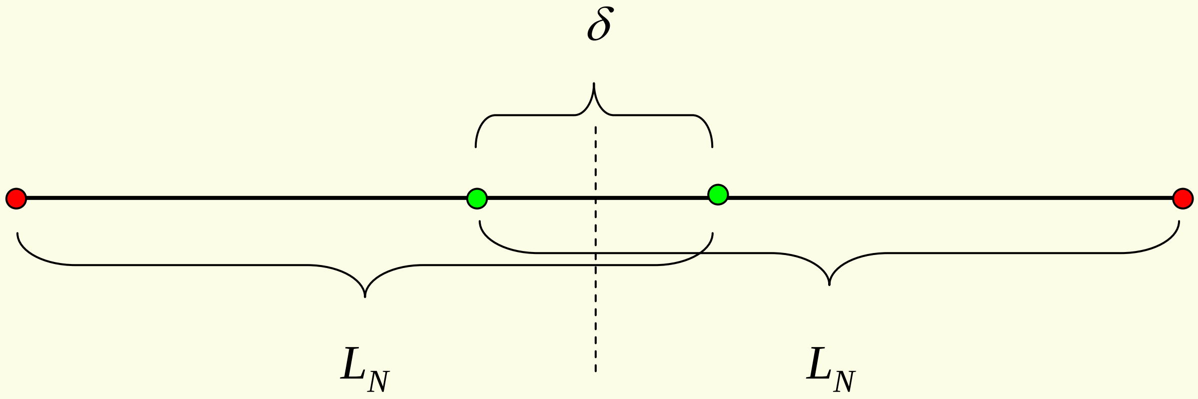
Riduzione dell'intervallo di incertezza

Se ad esempio si sceglie un posizionamento dei due punti finali come nel caso (a) è possibile osservare che l'intervallo finale di incertezza L_a è maggiore che nel caso (b) che ha ampiezza L_b.



Riduzione dell'intervallo di incertezza

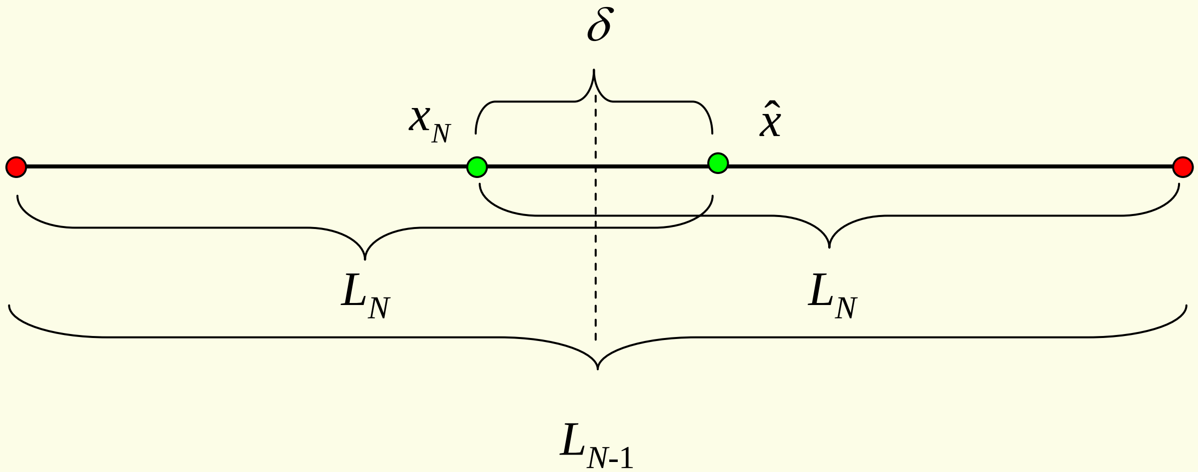
N.B.: la **minima distanza finale** tra le due prove deve essere al più pari all'**intervallo di definizione** δ.



Metodo di Fibonacci

Se il numero totale di iterazioni richiesto è N le ultime due prove dovranno trovarsi a distanza δ fra loro ed essere centrate nel penultimo intervallo di ampiezza L_{N-1} in modo che l'intervallo finale abbia ampiezza L_N.

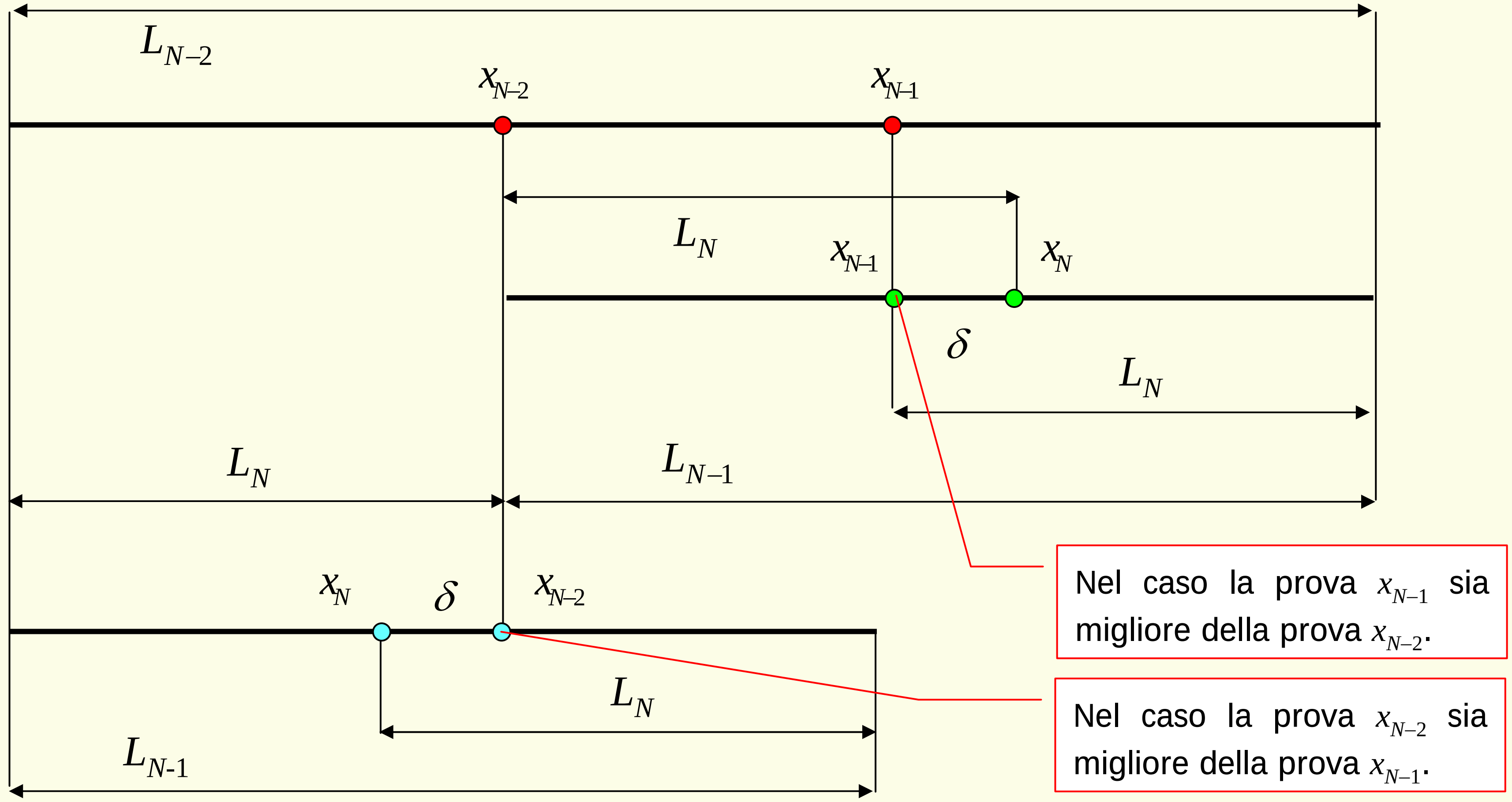
N.B.: di queste due prove una, $\hat{x}$, deve provenire da un'iterazione precedente (non necessariamente la $N-1$) e una sarà viceversa l'ultima prova x_N.



È possibile osservare che: $L_{N-1} = 2L_N - \delta = L_N\left(2 - \frac{\delta}{L_N}\right)$

Metodo di Fibonacci

A sua volta l'intervallo L_{N-1} è ricavato dall'intervallo L_{N-2}.



N.B.: in entrambi i casi si ha $L_{N-2} = L_{N-1} + L_N$.

Metodo di Fibonacci

La combinazione delle due relazioni individuate al passo $N-1$ e $N-2$

$$\begin{cases} L_{N-1} = 2L_N - \delta = L_N\left(2 - \dfrac{\delta}{L_N}\right) \\ L_{N-2} = L_{N-1} + L_N \end{cases}$$

porta a: $L_{N-2} = 3L_N - \delta = L_N\left(3 - \dfrac{\delta}{L_N}\right)$

Iterando il procedimento è possibile scrivere:

$$L_{N-3} = L_{N-2} + L_{N-1} = 2L_{N-1} + L_N = L_N\left(5 - 2\frac{\delta}{L_N}\right)$$

Metodo di Fibonacci

È possibile evincere la sequenza:

$$L_{N-1} = L_N\left(2 - \frac{\delta}{L_N}\right) \quad L_{N-2} = L_N\left(3 - \frac{\delta}{L_N}\right) \quad L_{N-3} = L_N\left(5 - 2\frac{\delta}{L_N}\right) \quad L_{N-4} = L_N\left(8 - 3\frac{\delta}{L_N}\right) \quad \ldots$$

Generalizzando si ottiene la seguente **formula generale**:

$$\boxed{L_{N-j} = L_N\left(F_{j+1} - F_{j-1}\frac{\delta}{L_N}\right) \qquad j = 1,\ldots,N-1}$$

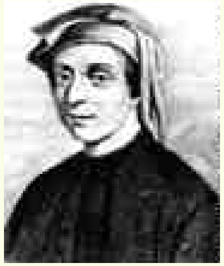
Dove i coefficienti F_j sono i numeri di Fibonacci (Leonardo Pisano)

caratterizzati dalla relazione:

$$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \qquad \text{con} \qquad F_0 = 1, \quad F_1 = 1$$

i	Fi
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89

Nota storica



Il Liber Abbaci

Leonardo Pisano (Pisa, 1170–1250) detto Fibonacci in quanto *figlio* di Guglielmo *Bonaccio*. Il padre era il rappresentante dei mercanti della Repubblica di Pisa. Fu educato in nord Africa.

Nel 1202 apparve ad opera di Leonardo Pisano un libro assai importante, dal titolo *Liber Abbaci*, cioè il libro dell'abaco, o abbaco, ovvero un "manuale per far di conto", un capolavoro nel campo della letteratura matematica che ebbe molta influenza sullo sviluppo delle scienze matematiche in Europa.

Nell'introduzione all'opera, l'autore raccomanda caldamente l'uso delle cifre arabe nelle opere scientifiche redatte nei conventi, al di fuori dei quali però erano sconosciute. In realtà le cifre arabe erano già state introdotte dal monaco Gerberto, più tardi noto come papa Silvestro II (999-1003).

La particolarità del libro di Leonardo Pisano risiede nel fatto che per risolvere molti problemi della vita quotidiana si ricorre all'uso dell'algebra, di origine araba.

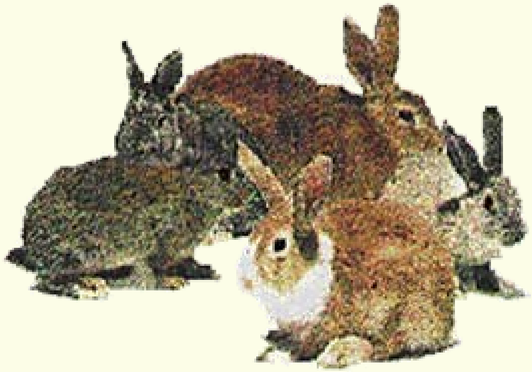
Tratto da Snijders, 1969

Nota storica

Tra i problemi posti da Fibonacci nel suo *Liber Abbaci* c'è quello delle **sette vecchie** che si recano a Roma, ognuna con sette muli, ogni mulo carico di sette sacchi, ogni sacco contenente sette pani, per ogni pane sette coltelli, ogni coltello in sette foderi. Ci si domanda quanti oggetti sono stati trasportati globalmente e l'autore fornisce la risposta applicando il concetto di "serie geometrica" con valore iniziale 7 e ragione 7 i cui 6 termini devono essere sommati ottenendo 137,256 oggetti.

Altro problema è quello dei **conigli**: se una coppia di conigli mette al mondo ogni mese una coppia di piccoli, che dopo due mesi producono a loro volta una nuova coppia di conigli, quante coppie di conigli si avranno dopo un anno supponendo nulla la mortalità dell'ecosistema?

Gennaio	1	**Luglio**	13
Febbraio	1	**Agosto**	21
Marzo	2	**Settembre**	34
Aprile	3	**Ottobre**	55
Maggio	5	**Novembre**	89
Giugno	8	**Dicembre**	144



Nota storica

La successione prodotta temporalmente dalla prima coppia di conigli rispetta la regola:
$$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \qquad \text{con} \qquad F_0 = 1, \quad F_1 = 1$$

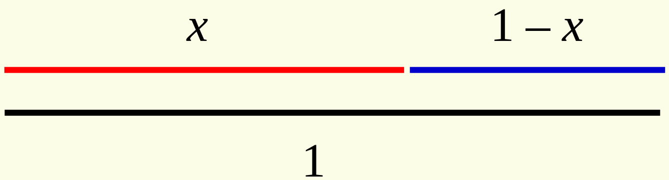
Il rapporto tra due numeri adiacenti della successione di Fibonacci converge rapidamente alla sezione aurea.

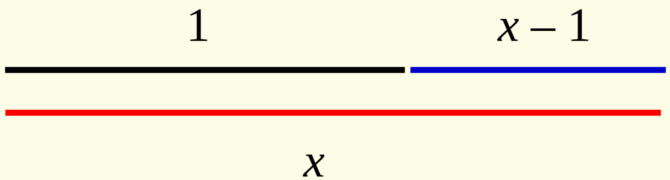
È possibile dimostrare che:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_{i-1}}{F_i} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0.6180339887498948482045868343656\ldots$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_i}{F_{i-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1.6180339887498948482045868343656\ldots$$

tali rapporti rappresentano la **sezione aurea** ovvero la porzione di segmento che è media proporzionale tra l'intero e il resto (o il duale come rappresentato nella figura a destra)





Metodo di Fibonacci

Se nella formula generale $L_{N-j} = L_N \left(F_{j+1} - F_{j-1} \frac{\delta}{L_N} \right)$ si pone $j = N - 1$ si ottiene:

$$L_1 = L_N \left(F_N - F_{N-2} \frac{\delta}{L_N} \right)$$

ecco risolto il problema di individuazione dell'intervallo iniziale. Inoltre vale:

$$L_N = \frac{L_1 + \delta F_{N-2}}{F_N}$$

Quindi assegnati: l'intervallo iniziale di incertezza L_1, il numero di iterazioni N da effettuare e l'intervallo di definizione δ è possibile determinare l'ampiezza ottimale L_N del segmento che rende minimo il massimo intervallo di incertezza finale.

N.B.: il metodo di Fibonacci prende il nome dal matematico italiano a causa dei coefficienti, presenti nella formula iterativa, che appartengono alla sequenza omonima. Fibonacci non è però l'ideatore del metodo.

Metodo di Fibonacci

Esempio: se l'intervallo di incertezza iniziale è $x_a = 0$ e $x_b = 18$, quale sarà il valore minimo del massimo intervallo finale usando 4 prove e sapendo che $\delta = 1$?

Applicando la formula generale: $L_N = \dfrac{L_1 + \delta F_{N-2}}{F_N}$

si ottiene nello specifico:

$$L_4 = \frac{L_1 + \delta F_2}{F_4} = \frac{18 + 1 \cdot 2}{5} = 4$$

Inoltre ricordando che $L_{N-j} = L_N \left(F_{j+1} - F_{j-1} \dfrac{\delta}{L_N} \right)$ le ampiezze degli intervalli intermedi valgono:

$$j = 2 \;\; \Rightarrow \;\; L_2 = L_4 \left(F_3 - F_1 \frac{\delta}{L_N} \right) = 4 \left(3 - 1 \frac{1}{4} \right) = 11$$

$$j = 1 \;\; \Rightarrow \;\; L_3 = L_4 \left(F_2 - F_0 \frac{\delta}{L_N} \right) = 4 \left(2 - 1 \frac{1}{4} \right) = 7$$

Metodo di Fibonacci

Esempio: è possibile anche percorrere la strada opposta. Ovvero, assegnati δ ed L_N determinare il numero di iterazioni necessarie per poter partire da un intervallo di incertezza iniziale, L_1, sufficientemente grande. Si supponga ad esempio di avere assegnato:

$$\delta = 1.\mathrm{E}-7 \qquad L_N = 1.\mathrm{E}-5$$

È possibile determinare la seguente tabella:

N	L1
5	0.0000797
10	0.0008866
15	0.0098323
20	0.1090419
25	1.2092932
30	13.4112671
35	148.7332313
40	1649.4768114

N.B.: aumentando il numero di iterazioni del metodo è possibile utilizzare inizialmente un intervallo di incertezza più ampio.

Metodo di Fibonacci

PRO

1. Garantisce la convergenza ad un minimo relativo.
2. Rende minimo il massimo intervallo finale di incertezza.

CONTRO

1. Ha sempre la stessa efficienza indipendentemente dalla funzione considerata. Mentre ciò è un pregio per funzioni molto complicate risulta viceversa uno svantaggio con funzioni molto semplici. In particolare quando l'intervallo di incertezza è molto piccolo spesso la funzione può essere ragionevolmente approssimata con una parabola.
2. Richiede la conoscenza di un intervallo di incertezza.
3. Richiede la conoscenza dell'intervallo di definizione δ.
4. Se la ricerca viene interrotta non è più il metodo che rende minimo il massimo intervallo finale di incertezza.

Metodo della sezione aurea

Nei moderni programmi di calcolo il metodo di Fibonacci non viene praticamente più utilizzato. Si preferisce una variante più elastica: il **metodo della sezione aurea** basato sempre sul concetto del confronto.

L'idea è quella che, dato un intervallo di incertezza generico, è opportuno sfruttare la presenza del punto interno già disponibile (proveniente dai passi precedenti). Il metodo si basa su 2 idee di base:

1. Affinché il nuovo punto sia posizionato in modo ottimale occorre che i due punti interni (quello precedente e quello nuovo) siano **simmetrici** rispetto al centro. Risulta quindi: $L_{j-1} = L_j + L_{j+1}$

2. Si impone quindi che la velocità di riduzione degli intervalli sia costante:

$$\frac{L_{j-1}}{L_j} = \frac{L_j}{L_{j+1}} = \phi$$

Dalle due relazioni si ottiene: $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ quindi: $\phi^2 - \phi - 1 = 0$

Risulta: $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339887498948482045868\ldots$ ovvero la **sezione aurea**.

Metodo della sezione aurea

È possibile osservare che il metodo della sezione aurea può essere ottenuto da quello di Fibonacci. Infatti se si trascura il termine δ / L_N si ottiene:

$$L_{N-j} = L_N \left(F_{j+1} - \cancel{F_{j-1} \frac{\delta}{L_N}} \right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{L_{N-j}}{L_{N-j+1}} = \frac{F_{j+1}}{F_j}$$

e come precedentemente riportato, il rapporto di due numeri di Fibonacci adiacenti tende velocemente alla sezione aurea.

<u>Algoritmo:</u>

Dato l'intervallo di incertezza iniziale L_1 le prime due prove interne vanno poste a distanza L_1 / ϕ dagli estremi. Si procede così iterativamente.

Metodo della sezione aurea

Sequenza operativa:

1. Si identifica l'intervallo iniziale L_1, definito dai due punti estremi x_a e x_b all'interno del quale la funzione è unimodale ed è situato il minimo
2. Si calcola quindi l'ampiezza del nuovo intervallo: $L_2 = \dfrac{L_1}{\phi}$
3. Si posizionano i due punti interni: $x_1 = x_b - L_2$ e $x_2 = x_a + L_2$
4. Si restringe l'intervallo di incertezza eliminando uno o entrambi i punti esterni x_a e x_b a seconda che siano valide le seguenti condizioni:
    - se $f(x_1) < f(x_2)$ l'intervallo di incertezza diventa: $[x_a, x_2]$
    - se $f(x_1) > f(x_2)$ l'intervallo di incertezza diventa: $[x_1, x_b]$
    - se $f(x_1) = f(x_2)$ l'intervallo di incertezza diventa: $[x_1, x_2]$
5. Si riordinano i punti residui e si calcola il nuovo intervallo L_3 utilizzando la formula del punto 2 opportunamente aggiornata. La procedura viene iterata.

Metodo della sezione aurea

Esempio: è dato un intervallo di incertezza con $x_a = 0$ e $x_b = 18$. Quindi $L_1 = 18$.

$$L_2 = \frac{L_1}{\phi} = \frac{18}{1.618} = 11.1246 \qquad L_3 = \frac{L_2}{\phi} = \frac{11.1246}{1.618} = 6.8753 \qquad L_4 = \frac{L_3}{\phi} = \frac{6.8753}{1.618} = 4.2492$$

Si rammenta che nel caso del metodo di Fibonacci a parità di condizioni si aveva:

$$L_2^{Fib} = 11 \qquad L_3^{Fib} = 7 \qquad L_4^{Fib} = 4$$

N.B.: è possibile osservare come avendo programmato il metodo di Fibonacci per fermarsi dopo 4 iterazioni, se si arriva effettivamente alla quarta prova tale metodo è migliore rispetto a quello della sezione aurea (4 vs 4.2492).

Viceversa se si blocca il metodo di Fibonacci (programmato per 4 prove) alla terza prova si vede che il metodo della sezione aurea è migliore rispetto a quello di Fibonacci (7 vs 6.8753).

L'efficienza del metodo della sezione aurea, così come quella del metodo di Fibonacci, è indipendente dalla funzione da ottimizzare.

Metodo della sezione aurea

Si definisce **rapporto di riduzione**, α, il rapporto tra l'intervallo finale di incertezza L_N e quello iniziale L_1:

$$\alpha = \frac{L_N}{L_1}$$

Nel caso del metodo della **sezione aurea** il rapporto di riduzione vale:

$$\alpha = \frac{L_N}{L_1} = \frac{1}{\phi^{N-1}}$$

Conseguentemente il numero totale N di iterazioni necessario per ottenere uno specifico rapporto di riduzione, α, è:

$$N = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \phi}$$

Metodo della sezione aurea

PRO

1. Garantisce la convergenza ad un minimo relativo.
2. È sempre efficiente qualunque sia il momento in cui si interrompe la ricerca.
3. Non richiede la conoscenza dell'intervallo di definizione δ.

CONTRO

1. Ha sempre la stessa efficienza indipendentemente dalla funzione considerata. Mentre ciò è un pregio per funzioni molto complicate risulta viceversa uno svantaggio con funzioni molto semplici. In particolare quando l'intervallo di incertezza è molto piccolo spesso la funzione può essere ragionevolmente approssimata con una parabola.
2. Richiede la conoscenza di un intervallo di incertezza.

Metodi di approssimazione

I metodi di approssimazione utilizzano alcuni punti della funzione obiettivo, già calcolati, per effettuare un'**interpolazione esatta**.

Viene poi usato il modello che interpola esattamente la funzione per stimare il valore di x per cui essa risulta minima.

Per poter effettuare una **interpolazione esatta** occorre che la funzione interpolante soddisfi i seguenti **requisiti**:

- deve rappresentare al meglio la funzione che si desidera interpolare.
- deve essere facile risolvere il sistema che permette di determinare i suoi parametri.
- deve essere facile utilizzare la funzione interpolante per effettuare una previsione.
- in molti casi deve essere facile stimare con la funzione interpolante le derivate prime e seconde.

Metodo di approssimazione parabolica

Nel caso specifico dell'ottimizzazione la funzione interpolante deve soddisfare un ulteriore requisito:

- deve essere tale da permettere di stimare facilmente il valore in cui essa risulta minima.

Conseguentemente, la sola funzione interpolante che ragionevolmente rispetta le specifiche summenzionate è la parabola:

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Che ha minimo in: $x = -\dfrac{a_1}{2a_2}$

Se la funzione obiettivo passa per i punti (x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c), l'equazione della parabola è:

$$P_2(x) = y_a + (x - x_a)\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} + \lambda (x - x_a)(x - x_b)$$

$$\lambda = \frac{(y_c - y_a)(x_b - x_a) - (y_b - y_a)(x_c - x_a)}{(x_b - x_a)(x_c - x_a)(x_c - x_b)}$$

Metodo di approssimazione parabolica

Il punto di stazionarietà della derivata prima della parabola (minimo) lo si ottiene a partire dai coefficienti:

$$a_2 = \lambda$$

$$a_1 = \beta - \lambda\left(x_a + x_b\right)$$

$$a_0 = y_a - \beta x_a + \lambda x_a x_b \qquad \beta = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

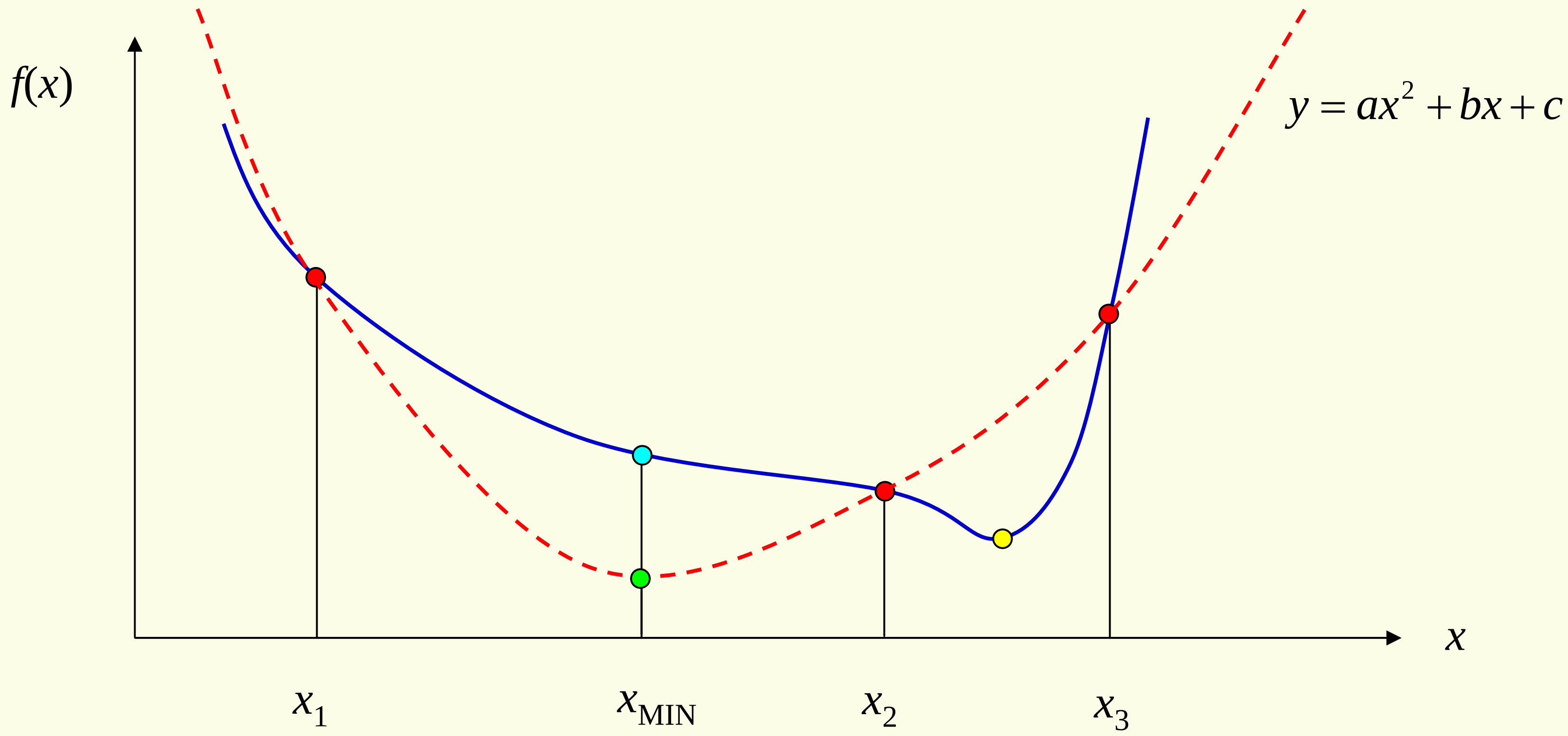
Si ottiene che: $x_{MIN} = -\dfrac{a_1}{2a_2} = \dfrac{1}{2}\left(x_a + x_b - \dfrac{\beta}{\lambda}\right)$

Occorre al contempo verificare che il punto x_{MIN} sia effettivamente un minimo controllando la concavità della parabola. Si deve avere: $a_2 = \lambda > 0$

In caso contrario il metodo non funziona, cioè non converge al punto di ottimo del problema.

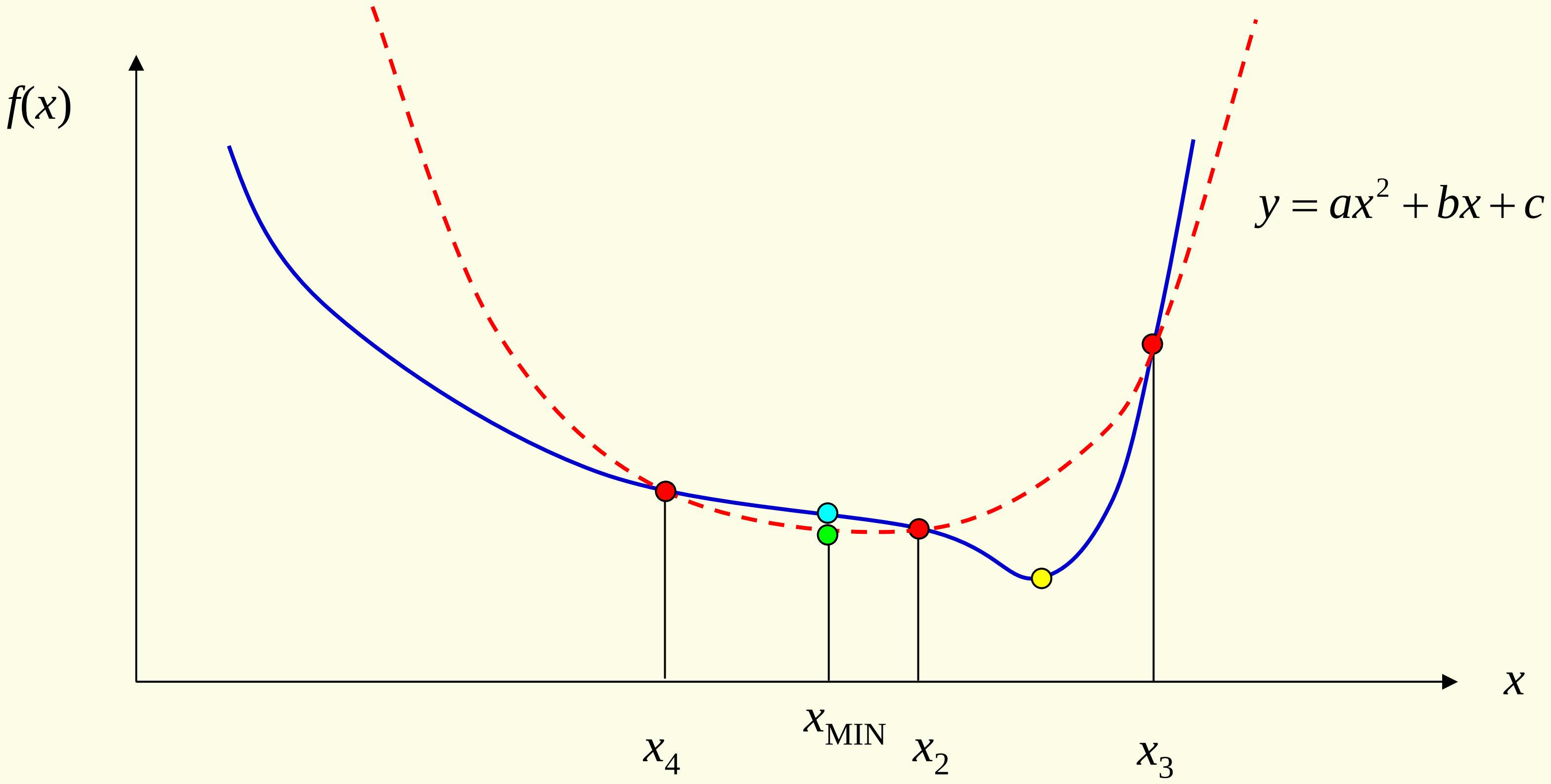
Iterando il procedimento, il punto x_{MIN} sostituisce il peggiore dei tre punti utilizzati per determinare i coefficienti della parabola. Non vi è certezza di convergenza.

Metodo di approssimazione parabolica



Individuato il punto di minimo della parabola (p.to VERDE) calcolo $f(x_{MIN})$ relativo alla curva (p.to AZZURRO) e basandomi anche sugli altri tre punti (ROSSI) a disposizione, relativi alla curva $f(x)$ unimodale, determino il nuovo intervallo $x_{MIN},\ldots x_3$ cui appartiene il punto di minimo della funzione (p.to GIALLO). Avendo a disposizione tre punti posso iterare la procedura di interpolazione valutando la nuova parabola passante per tali punti. Prima però pongo $x_4 = x_{MIN}$

Metodo di approssimazione parabolica



Individuato il punto di minimo della parabola (p.to VERDE) calcolo $f(x_{MIN})$ relativo alla curva (p.to AZZURRO) e basandomi anche sugli altri tre punti (ROSSI) a disposizione, relativi alla curva $f(x)$ unimodale, determino il nuovo intervallo $x_{MIN},\ldots x_3$ cui appartiene il punto di minimo della funzione (p.to GIALLO). Avendo a disposizione tre punti posso iterare la procedura di interpolazione valutando la nuova parabola passante per tali punti. Prima però pongo $x_5 = x_{MIN}$. E così via...

Metodo di approssimazione parabolica

PRO

1. La velocità di convergenza è superiore a quella di un metodo lineare, quindi è molto buona. L'ordine di convergenza del metodo è 1.3.

CONTRO

1. Il metodo può divergere.
2. Non sempre la funzione obiettivo è approssimabile con una parabola. Qualora la funzione obiettivo non sia approssimabile con una parabola è questa una delle possibili cause di divergenza del metodo.

Considerazioni generali sui metodi di ottimizzazione

Un buon programma per la ricerca del minimo monodimensionale di una funzione deve contenere sempre diversi algoritmi. La scelta del metodo efficiente è ovvia perché non esistono alternative (metodo di approssimazione parabolica). Il metodo robusto viene scelto fra il metodo di Fibonacci e quello della sezione aurea.

Si auspica che un metodo di ottimizzazione monodimensionale soddisfi le seguenti caratteristiche: **robustezza**, **accuratezza** ed **efficienza**.

N.B.: è assai difficile trovare sia a livello *public domain* che in commercio librerie per l'ottimizzazione monodimensionale in grado di soddisfare le caratteristiche summenzionate (la libreria BzzMath© rappresenta un'ottima eccezione).

Considerazioni generali sui metodi di ottimizzazione

Robustezza

- il metodo deve riuscire a trovare con buona probabilità il minimo assoluto in una funzione con più minimi relativi;
- deve riuscire a risolvere problemi in cui la funzione e/o le sue derivate presentino discontinuità;
- deve riuscire a risolvere problemi in cui la funzione non è mai approssimabile ad una parabola con derivata seconda positiva;
- deve riuscire a risolvere problemi in cui la funzione non è definita in qualche intervallo.

Accuratezza

- il metodo deve riuscire a trovare la soluzione in modo preciso.

Efficienza

- il metodo deve avere convergenza quadratica con funzioni che siano ben approssimabili con una parabola e buona velocità di convergenza in caso contrario.

Ricerca dell’intervallo di incertezza

Come visto in precedenza, i metodi di ricerca monodimensionale dell’ottimo di una funzione unimodale sono sicuri ed efficienti quando sia noto l’intervallo di incertezza.

In generale si preferisce lasciare all’utente l’assegnazione dell’intervallo di incertezza.

Qualora tale intervallo non sia noto, non esistono metodi sicuri per la sua individuazione. Alcuni algoritmi richiedono all’utente un solo punto. Da lì individuano un secondo punto (perturbazione opportuna del primo) e quindi si spostano nella direzione in cui la funzione diminuisce (se il problema è di minimizzazione). Si rammenta infatti che con due soli punti non è detto che l’intervallo sotteso sia quello di incertezza.

Con tre punti distinti si è sicuri di avere individuato l’intervallo di incertezza solo se il punto interno ha il valore della funzione obiettivo inferiore a quello dei due punti estremi (e se naturalmente la funzione è unimodale).

Criteri di stop

Con riferimento ai criteri volti a bloccare la procedura di ricerca dell'ottimo, le considerazioni qualitative condotte nel caso dell'azzeramento di funzioni valgono anche per l'ottimizzazione monodimensionale.

I **criteri di stop** che è opportuno utilizzare sono:

1. Limite massimo sul numero di iterazioni dell'algoritmo di ricerca
2. Verifica dell'intervallo di incertezza $[x_a, x_b]$. Bloccare i calcoli se risulta:

$$\left|x_b - x_a\right| < xTolAbs + xTolRel \cdot \left(\left|x_a\right| + \left|x_b\right|\right)$$

N.B.: nel caso dello zero di una funzione $xTolRel$ può essere dell'ordine del macheps mentre nel caso dell'ottimizzazione deve essere dell'ordine della **radice quadrata del macheps**.

3. I calcoli vengono interrotti quando la funzione obiettivo scende sotto un valore assegnato dall'utente (valore assoluto o miglioramento percentuale).

Letture aggiuntive

Leonardo Pisano detto Fibonacci

Leonardo Pisano is better known by his nickname Fibonacci. He was the son of Guilielmo and a member of the Bonacci family. Fibonacci himself sometimes used the name Bigollo, which may mean good-for-nothing or a traveller. As stated:

Did his countrymen wish to express by this epithet their disdain for a man who concerned himself with questions of no practical value, or does the word in the Tuscan dialect mean a much-travelled man, which he was?

Fibonacci was born in Italy but was educated in North Africa where his father, Guilielmo, held a diplomatic post. His father's job was to represent the merchants of the Republic of Pisa who were trading in Bugia, later called Bougie and now called Bejaia. Bejaia is a Mediterranean port in northeastern Algeria. The town lies at the mouth of the Wadi Soummam near Mount Gouraya and Cape Carbon. Fibonacci was taught mathematics in Bugia and travelled widely with his father, recognising and the enormous advantages of the mathematical systems used in the countries they visited. Fibonacci writes in his famous book *Liber abaci* (1202):

When my father, who had been appointed by his country as public notary in the customs at Bugia acting for the Pisan merchants going there, was in charge, he summoned me to him while I was still a child, and having an eye to usefulness and future convenience, desired me to stay there and receive instruction in the school of accounting. There, when I had been introduced to the art of the Indians' nine symbols through remarkable teaching, knowledge of the art very soon pleased me above all else and I came to understand it, for whatever was studied by the art in Egypt, Syria, Greece, Sicily and Provence, in all its various forms.

Fibonacci ended his travels around the year 1200 and at that time he returned to Pisa. There he wrote a number of important texts which played an important role in reviving ancient mathematical skills and he made significant contributions of his own. Fibonacci lived in the days before printing, so his books were hand written and the only way to have a copy of one of his books was to have another hand-written copy made. Of his books we still have copies of *Liber abaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225), and *Liber quadratorum.* Given that relatively few hand-made copies would ever have been produced, we are fortunate to have access to his writing in these works. However, we know that he wrote some other texts which, unfortunately, are lost. His book on commercial arithmetic *Di minor guisa* is lost as is his commentary on Book X of Euclid's *Elements* which contained a numerical treatment of irrational numbers which Euclid had approached from a geometric point of view.

Leonardo Pisano

One might have thought that at a time when Europe was little interested in scholarship, Fibonacci would have been largely ignored. This, however, is not so and widespread interest in his work undoubtedly contributed strongly to his importance. Fibonacci was a contemporary of Jordanus but he was a far more sophisticated mathematician and his achievements were clearly recognised, although it was the practical applications rather than the abstract theorems that made him famous to his contemporaries.

The Holy Roman emperor was Frederick II. He had been crowned king of Germany in 1212 and then crowned Holy Roman emperor by the Pope in St Peter's Church in Rome in November 1220. Frederick II supported Pisa in its conflicts with Genoa at sea and with Lucca and Florence on land, and he spent the years up to 1227 consolidating his power in Italy. State control was introduced on trade and manufacture, and civil servants to oversee this monopoly were trained at the University of Naples which Frederick founded for this purpose in 1224.

Frederick became aware of Fibonacci's work through the scholars at his court who had corresponded with Fibonacci since his return to Pisa around 1200. These scholars included Michael Scotus who was the court astrologer, Theororus the court philosopher and Dominicus Hispanus who suggested to Frederick that he meet Fibonacci when Frederick's court met in Pisa around 1225.

Johannes of Palermo, another member of Frederick II's court, presented a number of problems as challenges to the great mathematician Fibonacci. Three of these problems were solved by Fibonacci and he gives solutions in *Flos* which he sent to Frederick II. We give some details of one of these problems below.

After 1228 there is only one known document which refers to Fibonacci.
This is a decree made by the Republic of Pisa in 1240 in which a salary is awarded to:

... the serious and learned Master Leonardo Bigollo ....

This salary was given to Fibonacci in recognition for the services that he had given to the city, advising on matters of accounting and teaching the citizens.

Leonardo Pisano

Liber abaci, published in 1202 after Fibonacci's return to Italy, was dedicated to Scotus. The book was based on the arithmetic and algebra that Fibonacci had accumulated during his travels. The book, which went on to be widely copied and imitated, introduced the Hindu-Arabic place-valued decimal system and the use of Arabic numerals into Europe. Indeed, although mainly a book about the use of Arab numerals, which became known as algorism, simultaneous linear equations are also studied in this work. Certainly many of the problems that Fibonacci considers in *Liber abaci* were similar to those appearing in Arab sources.

The second section of *Liber abaci* contains a large collection of problems aimed at merchants. They relate to the price of goods, how to calculate profit on transactions, how to convert between the various currencies in use in Mediterranean countries, and problems which had originated in China.

A problem in the third section of *Liber abaci* led to the introduction of the Fibonacci numbers and the Fibonacci sequence for which Fibonacci is best remembered today:-

A certain man put a pair of rabbits in a place surrounded on all sides by a wall. How many pairs of rabbits can be produced from that pair in a year if it is supposed that every month each pair begets a new pair which from the second month on becomes productive?

The resulting sequence is 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (Fibonacci omitted the first term in *Liber abaci*). This sequence, in which each number is the sum of the two preceding numbers, has proved extremely fruitful and appears in many different areas of mathematics and science. The *Fibonacci Quarterly* is a modern journal devoted to studying mathematics related to this sequence.

Many other problems are given in this third section, including these types, and many many more:

A spider climbs so many feet up a wall each day and slips back a fixed number each night, how many days does it take him to climb the wall. A hound whose speed increases arithmetically chases a hare whose speed also increases arithmetically, how far do they travel before the hound catches the hare. Calculate the amount of money two people have after a certain amount changes hands and the proportional increase and decrease are given.

Leonardo Pisano

There are also problems involving perfect numbers, problems involving the Chinese remainder theorem and problems involving summing arithmetic and geometric series.

Fibonacci treats numbers such as 10 in the fourth section, both with rational approximations and with geometric constructions.

A second edition of *Liber abaci* was produced by Fibonacci in 1228 with a preface, typical of so many second editions of books, stating that:-

... new material has been added [*to the book*] *from which superfluous had been removed...*

Another of Fibonacci's books is *Practica geometriae* written in 1220 which is dedicated to Dominicus Hispanus who we mentioned above. It contains a large collection of geometry problems arranged into eight chapters with theorems based on Euclid's *Elements* and Euclid's *On Divisions.* In addition to geometrical theorems with precise proofs, the book includes practical information for surveyors, including a chapter on how to calculate the height of tall objects using similar triangles. The final chapter presents what Fibonacci called geometrical subtleties [1]:-

Among those included is the calculation of the sides of the pentagon and the decagon from the diameter of circumscribed and inscribed circles; the inverse calculation is also given, as well as that of the sides from the surfaces. ... to complete the section on equilateral triangles, a rectangle and a square are inscribed in such a triangle and their sides are algebraically calculated ...

In *Flos* Fibonacci gives an accurate approximation to a root of $10x + 2x^2 + x^3 = 20$, one of the problems that he was challenged to solve by Johannes of Palermo. This problem was not made up by Johannes of Palermo, rather he took it from Omar Khayyam's algebra book where it is solved by means of the intersection of a circle and a hyperbola. Fibonacci proves that the root of the equation is neither an integer nor a fraction, nor the square root of a fraction. He then continues:-

And because it was not possible to solve this equation in any other of the above ways, I worked to reduce the solution to an approximation.

Leonardo Pisano

Without explaining his methods, Fibonacci then gives the approximate solution in sexagesimal notation as 1.22.7.42.33.4.40 (this is written to base 60, so it is $1 + {}^{22}/_{60} + {}^{7}/_{60^2} + {}^{42}/_{60^3} + \ldots$). This converts to the decimal 1.3688081075 which is correct to nine decimal places, a remarkable achievement.

Liber quadratorum, written in 1225, is Fibonacci's most impressive piece of work, although not the work for which he is most famous. The book's name means the book of squares and it is a number theory book which, among other things, examines methods to find Pythogorean triples. Fibonacci first notes that square numbers can be constructed as sums of odd numbers, essentially describing an inductive construction using the formula $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. Fibonacci writes:-

I thought about the origin of all square numbers and discovered that they arose from the regular ascent of odd numbers. For unity is a square and from it is produced the first square, namely 1*; adding* 3 *to this makes the second square, namely* 4*, whose root is* 2*; if to this sum is added a third odd number, namely* 5*, the third square will be produced, namely* 9*, whose root is* 3*; and so the sequence and series of square numbers always rise through the regular addition of odd numbers.*

To construct the Pythagorean triples, Fibonacci proceeds as follows:-

Thus when I wish to find two square numbers whose addition produces a square number, I take any odd square number as one of the two square numbers and I find the other square number by the addition of all the odd numbers from unity up to but excluding the odd square number. For example, I take 9 *as one of the two squares mentioned; the remaining square will be obtained by the addition of all the odd numbers below* 9*, namely* 1, 3, 5, 7, *whose sum is* 16*, a square number, which when added to* 9 *gives* 25*, a square number.*

Fibonacci also proves many interesting number theory results such as:

there is no x, y such that $x^2 + y^2$ and $x^2 - y^2$ are both squares.

and $x^4 - y^4$ cannot be a square.

He defined the concept of a *congruum*, a number of the form $ab(a + b)(a - b)$, if $a + b$ is even, and 4 times this if $a + b$ is odd. Fibonacci proved that a congruum must be divisible by 24 and he also showed that for x, c such that $x^2 + c$ and $x^2 - c$ are both squares, then c is a congruum. He also proved that a square cannot be a congruum.

Leonardo Pisano

As stated in [2]:-

... the Liber quadratorum alone ranks Fibonacci as the major contributor to number theory between Diophantus *and the* 17 *th-century French mathematician Pierre de* Fermat.

Fibonacci's influence was more limited than one might have hoped and apart from his role in spreading the use of the Hindu-Arabic numerals and his rabbit problem, Fibonacci's contribution to mathematics has been largely overlooked. As explained in [1]:-

Direct influence was exerted only by those portions of the "Liber abaci" and of the "Practica" that served to introduce Indian-Arabic numerals and methods and contributed to the mastering of the problems of daily life. Here Fibonacci became the teacher of the masters of computation and of the surveyors, as one learns from the "Summa" of Luca Pacioli *... Fibonacci was also the teacher of the "Cossists", who took their name from the word 'causa' which was first used in the West by Fibonacci in place of 'res' or 'radix'. His alphabetic designation for the general number or coefficient was first improved by* Viète ...

Fibonacci's work in number theory was almost wholly ignored and virtually unknown during the Middle ages. Three hundred years later we find the same results appearing in the work of Maurolico.

The portrait above is from a modern engraving and is believed to not be based on authentic sources.

Article by: *J J O'Connor* and *E F Robertson*

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html

Bibliografia

- Atkinson K. E., “Elementary Numerical Analysis”, John Wiley & Sons, (1993)
- Buzzi Ferraris G., “Metodi numerici e Software in C++”, Addison Wesley, (1998)
- Comincioli V., “Analisi numerica. Metodi Modelli Applicazioni”, McGraw-Hill, (1990)
- Livio M., “La sezione aurea”, Rizzoli, (2002)
- Snijders C. J., “La sezione aurea”, Muzzio, (1985)

- http://www.chem.polimi.it/homes/gbuzzi/index.htm
- http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html
- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html