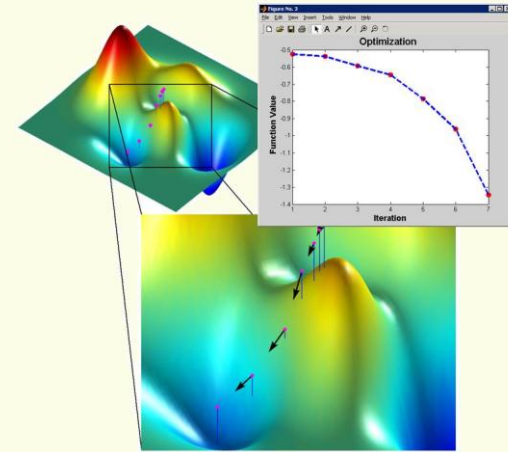
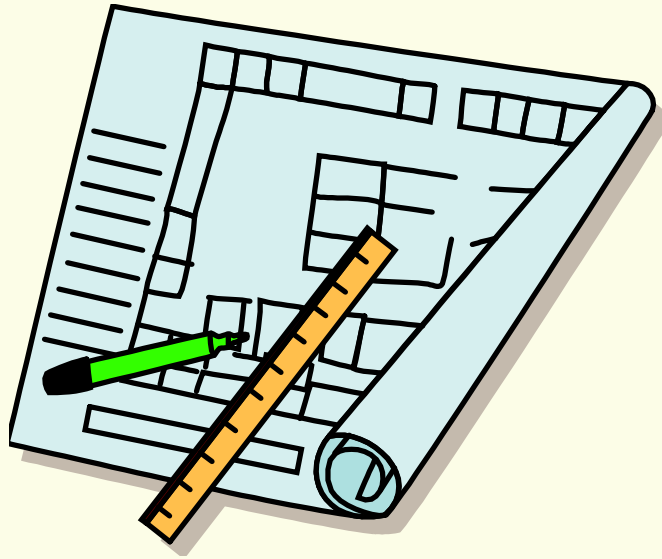


L1

Calcolo numerico – Algoritmi



Introduzione al calcolo numerico

Calcolo numerico, Analisi numerica, Metodi computazionali sono solo alcuni sinonimi per descrivere i contenuti su cui si fonda il corso di:

Calcoli di Processo dell'Ingegneria Chimica

La matematica è uno *strumento* per *modellare* il mondo reale.

Un *modello* è la *rappresentazione* di un sistema o di un processo, ottenuta sostituendo con semplificazioni, astrazioni ed analogie al fenomeno reale un fenomeno in un campo più familiare. In un modello matematico tale rappresentazione è fatta in termini di *variabili, parametri e relazioni funzionali* che definiscono un *problema matematico*.

Valeriano Comincioli, 1990



Introduzione al calcolo numerico

Lo scopo della costruzione di un modello matematico è illuminare mediante la sua analisi gli aspetti incogniti della realtà.

Condizione necessaria, affinché il modello matematico sia utile è che sia **risolubile**.

Il problema matematico associato deve quindi risultare:

Ben posto: esistenza, unicità e stabilità della soluzione. In un insieme di dati reali, il problema ha una ed una sola soluzione che varia con continuità al variare dei dati. Eventuali molteplicità e discontinuità devono essere analizzate e spiegate.

Ben condizionato: a piccole perturbazioni dei dati corrispondono piccole perturbazioni dei risultati.



Introduzione al calcolo numerico

Spesso, anzi quasi sempre, la soluzione del problema matematico NON è in forma esplicita.

È allora necessario rappresentare il problema in dimensione finita mediante una **discretizzazione** del problema continuo.

Il modello discreto o **modello numerico** richiede ancora proprietà necessarie quali: esistenza, unicità e stabilità della soluzione.

Uno dei punti principali da indagare è la capacità del modello discreto di descrivere il modello continuo.

Occorre cioè analizzare la convergenza del metodo tramite, se possibile, la maggiorazione dell'errore commesso.



Introduzione al calcolo numerico

Altro punto fondamentale: un modello numerico in genere NON ha soluzione esplicita.

Occorre in tal caso (praticamente sempre) selezionare un algoritmo in grado di risolvere il problema.

Una volta individuato l'algoritmo adatto alla risoluzione del problema numerico occorre implementare il metodo numerico in un programma di calcolo utilizzando uno specifico linguaggio di programmazione (Fortran, C++, ...).

Alternativamente è possibile utilizzare delle routine di calcolo già sviluppate da terze parti e fornire ad esse i dati di input che definiscono il problema, analizzando alla fine i risultati da esse prodotti.

Qualora l'ambiente di utilizzo di tali routine sia completamente integrato e fruibile in modo *user-friendly* si parla di programmi/linguaggi di quarta generazione quali: Matlab™, Mathematica™, Maple™, Mathcad™, ...



Introduzione al calcolo numerico

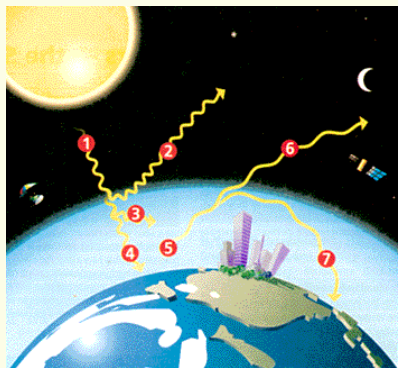
La sperimentazione numerica su calcolatore diventa infine uno strumento di indagine quantitativa.

Confrontando i risultati ottenuti tramite il modello con quelli sperimentali raccolti in campo (fenomeno reale) è possibile verificare:

- l'adeguatezza del modello matematico;
- la bontà delle ipotesi;
- il grado di dettaglio;
- l'affidabilità predittiva;
- la robustezza e l'efficienza dell'algoritmo.



Introduzione al calcolo numerico



4. Rappresentazione schematica



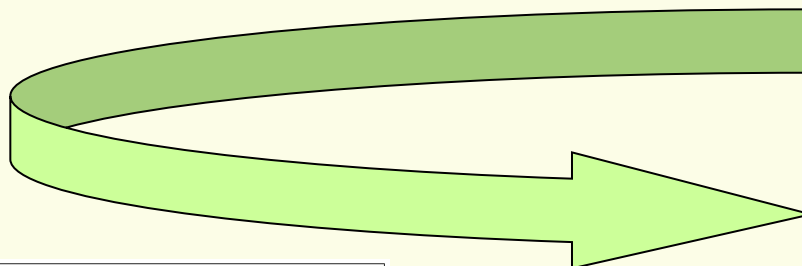
3. Meditazione



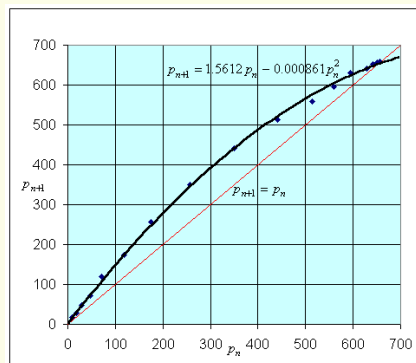
2. Osservazione



1. Realtà



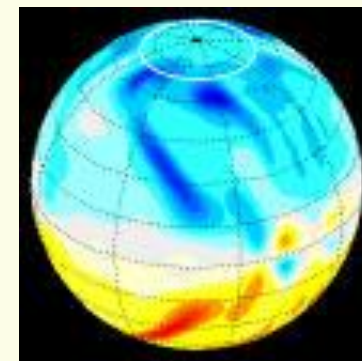
5. Modello matematico



6. Modello numerico e Algoritmo



7. Programma di calcolo



8. Analisi risultati

Panoramica storica

Gli algoritmi numerici, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, hanno inizio con la nascita della civiltà umana:

- Sumeri, ~3000 AC Mesopotamia, introducono il sistema sessagesimale avente cioè base numerica: 60;
- Papiro Rindh, ~1650 AC antico Egitto, descrive un metodo per l'azzeramento di una semplice equazione;
- Archimede di Siracusa, 287-212 AC, tra le numerose scoperte matematiche, perfeziona il metodo di esaustione (introdotto già da Eudosso di Cnide, ~360 AC), per il calcolo della lunghezza del segmento parabolico nonché per la valutazione di aree e volumi;
- Isaac Newton e Gottfried Leibniz, 1600-1700 DC, riprendono i concetti proposti nel metodo di esaustione passando all'integrazione e differenziazione di funzioni matematiche.



Panoramica storica

Questi sono solo alcuni degli esempi possibili relativi alla nascita della matematica e degli algoritmi per la risoluzione di problemi specifici.

Cina e India, Arabia, Europa occidentale sono questi gli ambiti culturali all'interno dei quali si sono sviluppati il concetto e la coscienza dello ZERO.

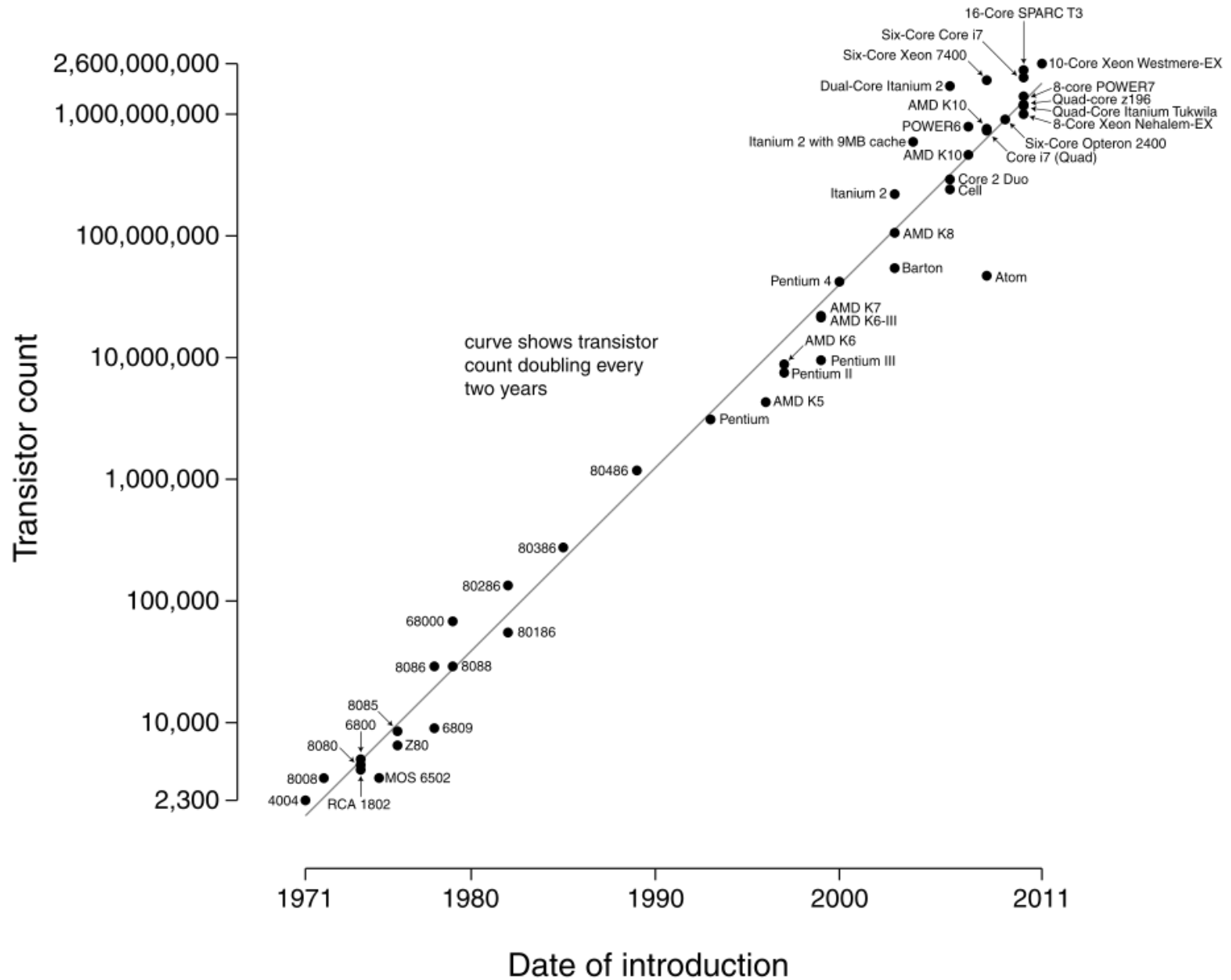
La nascita del computer digitale, a cavallo degli anni '40 – '50 dello scorso secolo, ha accelerato enormemente lo studio e lo sviluppo di nuovi algoritmi capaci di sfruttare la potenza di calcolo dei processori che raddoppiano le prestazioni ogni 18-24 mesi.



Moore predisse che tale andamento sarebbe continuato nel tempo. A distanza di quasi 40 anni si osserva un raddoppiamento del numero di transistor (proporzionale alla potenza di calcolo) ogni 18-24 mesi.



Microprocessor Transistor Counts 1971-2011 & Moore's Law



Analisi numerica

Scopo dell'analisi numerica (del calcolo numerico) è quello di:

Trovare gli algoritmi che risolvono un problema matematico
nel minimo tempo
con la massima accuratezza.

Valeriano Comincioli, 1990

NUMERICAL ANALYSIS: This refers to the analysis of the mathematical problems arising from models based on calculus.

Kendall Atkinson, 1993

In altre parole l'analisi numerica (il calcolo numerico) è l'arte di dare una **risposta numerica** ad un **problema matematico** mediante un **calcolatore automatico digitale**.



Algoritmo



Il concetto di **algoritmo** è indissolubilmente legato al matematico arabo: **al—Khwārizmī**. Nel 285 DC scrive il libro: **al-giabr wa-al-muqābala** che getta le basi per la moderna **algebra**.

Abu Ja'far Mohammed
Ben Musa

La traduzione letterale di al-giabr wa-al-muqābala è “Restaurazione e riduzione”.

L'esempio più illustrato è quello della risoluzione dell'equazione algebrica:

$$x^2 - 39 + 8x = -2x$$

Dapprima si **restauro** (al-giabr) l'equazione spostando al membro opposto i termini negativi e rendendoli quindi positivi: $x^2 + 8x + 2x = 39$

Quindi l'equazione viene **ridotta** (wa-al-muqābala) combinando i termini simili:

$$x^2 + 10x = 39$$

Infine si ricorre all'astuzia e all'inganno per costringere l'incognita a rivelare il suo nome; in questo caso: **3** e **-13**.



Requisiti

Quindi, per condurre un'analisi numerica efficace di un problema occorrono:

1. La conoscenza e comprensione dello **strumento computazionale** che verrà utilizzato (computer, calcolatrice).
2. La conoscenza e comprensione del **problema da risolvere**.
3. La costruzione o utilizzo di un **algoritmo** in grado di risolvere il problema matematico assegnato con l'**accuratezza** desiderata ed i **limiti di risorse** (tempo e memoria) disponibili.



Alcuni esempi

Dinamica di una popolazione cellulare [1]

Sotto le ipotesi più semplificate di accrescimento di una popolazione di cellule, il modello di Malthus propone il seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La **soluzione analitica** è data da: $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$

Alcuni esempi

Dinamica di una popolazione cellulare [1]

Si consideri ora il problema di determinare λ nota la popolazione in due istanti differenti: $t = 0$, $t = \bar{t}$

Occorre in questo caso risolvere l'equazione: $y_0 e^{\lambda \bar{t}} = y(\bar{t})$

che ha una **soluzione analitica**: $\lambda = \frac{1}{\bar{t}} \log \left(\frac{y(\bar{t})}{y_0} \right)$

Possiamo cioè affermare che la soluzione del problema è ESPLICITA

Alcuni esempi

Dinamica di una popolazione cellulare [2]

Si desidera complicare ulteriormente il modello introducendo un termine s che tenga conto della immigrazione/emigrazione della popolazione. Il modello matematico si trasforma in:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + s \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La **soluzione analitica** dell'equazione differenziale esiste ancora, tuttavia la determinazione di λ , supposti noti: $s, y(0), \bar{t}, y(\bar{t})$, richiede la **risoluzione numerica** di un'equazione algebrica non lineare:

$$e^{-\lambda \bar{t}} y(\bar{t}) = -\frac{s}{\lambda} (e^{-\lambda \bar{t}} - 1) + y_0$$

N.B.: Il modello di Malthus può essere ulteriormente complicato tenendo conto del termine di sovraffollamento, non lineare, che impedisce la determinazione di una soluzione analitica del modello dinamico.

Alcuni esempi

Dinamica di una popolazione di Predatori – Prede

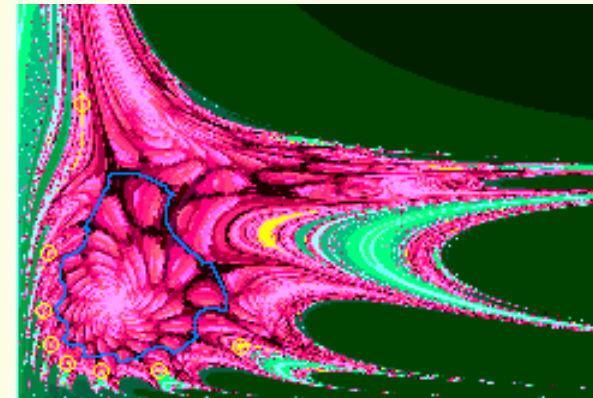
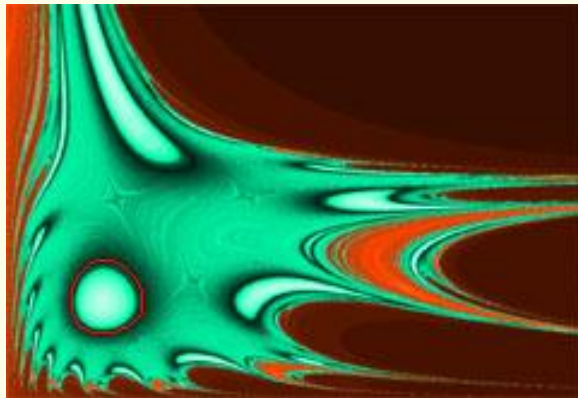
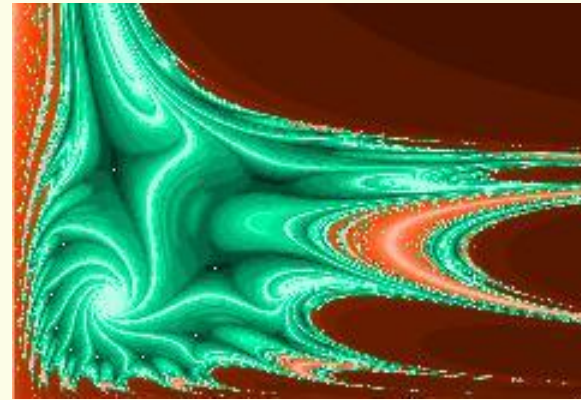
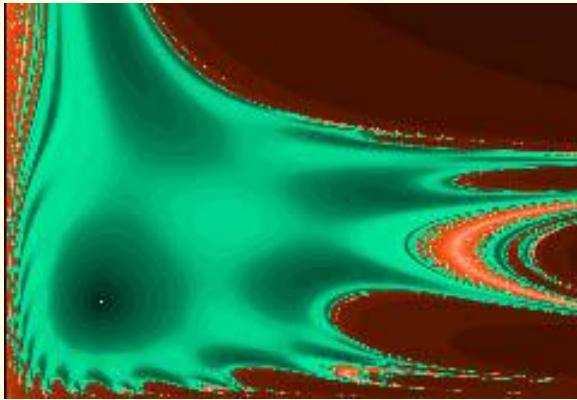
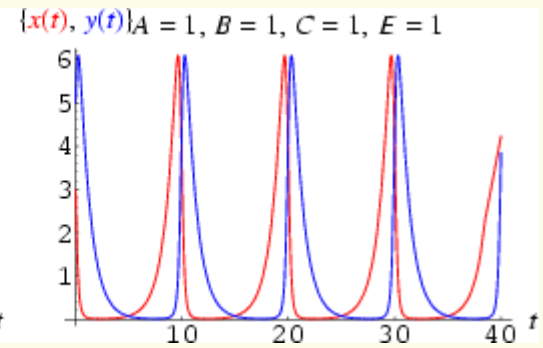
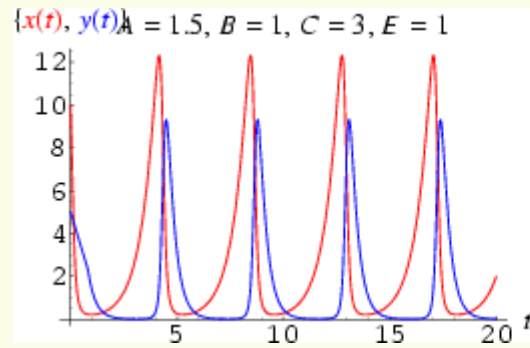
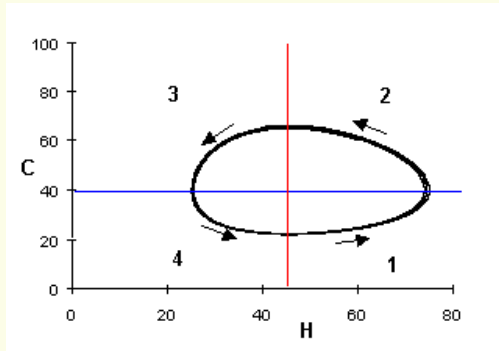
Per vie indipendenti il biofisico americano Lotka (1925) ed il matematico italiano Volterra (1926) arrivarono a modellare l'evoluzione di una popolazione di animali/individui interagenti, rappresentabili secondo le categorie: preda e predatore.

Ad esempio se indichiamo, al tempo t , il numero di volpi con $V(t)$ e il numero di conigli con $C(t)$ si ha:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= a(1 - bV(t))C(t) \\ \frac{dV}{dt} &= c(-1 + eC(t))V(t)\end{aligned}$$

Dove: a, b, c, e sono delle costanti positive dipendenti dall'ecosistema studiato.

Modello Predatore – Preda di Volterra Lotka



Lecture aggiuntive



Gordon Moore estimated in 2003 that the number of transistors shipped in a year had reached about 10,000,000,000,000,000,000 (10^{18}). That's about 100 times the number of ants estimated to be in the world.

Copyright © 2005 Intel Corporation. All rights reserved.

Legge di Moore



A chip-making tool

under development
superimposes magnetically
levitated images within a
tolerance of $1/10,000$ the
thickness of a human hair
— a feat equivalent to
driving a car straight for
400 miles while deviating
less than one inch.

Copyright © 2005 Intel Corporation. All rights reserved.

Legge di Moore



Because electricity travels a shorter distance in a smaller transistor, smaller transistors mean faster chips. It would take you about 25,000 years to turn a light switch on and off 1.5 trillion times, but Intel has developed transistors that can switch on and off that many times each second.

Copyright © 2005 Intel Corporation. All rights reserved.

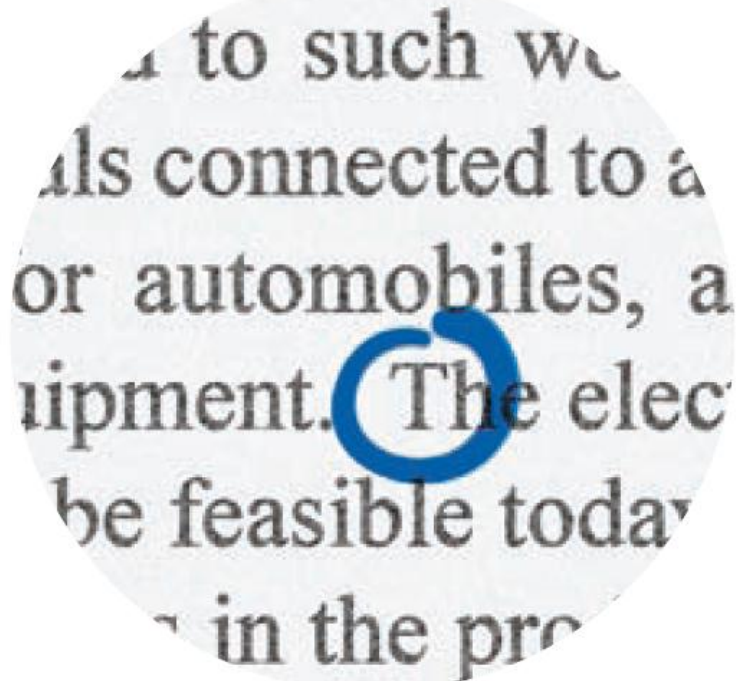
Legge di Moore



In 1978, a commercial flight between New York and Paris cost around \$900 and took seven hours. If the principles of Moore's Law had been applied to the airline industry the way they have to the semiconductor industry since 1978, that flight would now cost about a penny and take less than one second.

Copyright © 2005 Intel Corporation. All rights reserved.

Legge di Moore



...to such we
als connected to a
or automobiles, a
ipment. The elec
be feasible today
in the pro

The price per transistor

on a chip has dropped dramatically since Intel was founded in 1968. Some people estimate that the price of a transistor is now about the same as that of one printed newspaper character.

Copyright © 2005 Intel Corporation. All rights reserved.

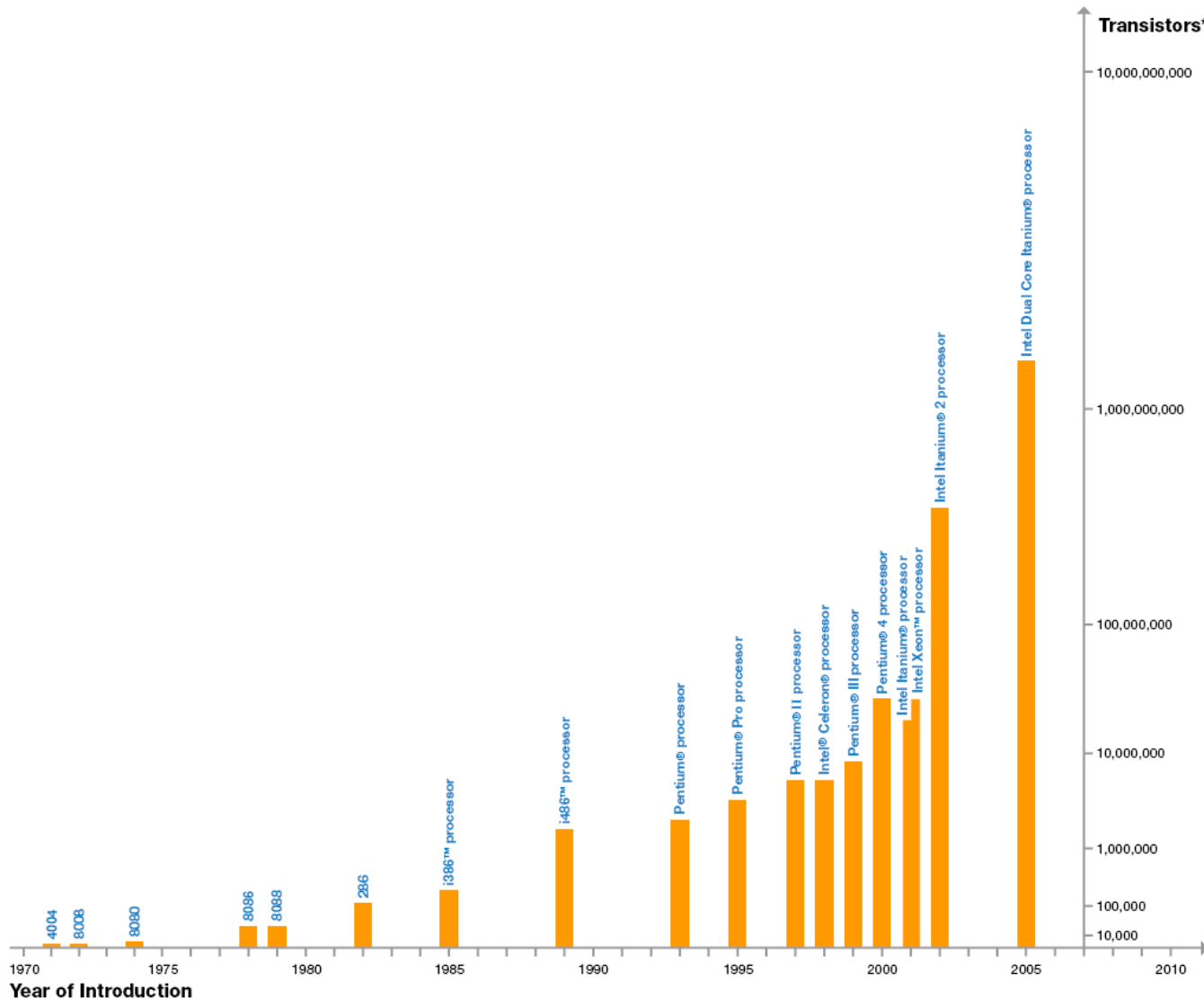
Legge di Moore



On the road to a billion transistors per chip, Intel has developed transistors so small that about 200 million of them could fit on the head of each of these pins.

Copyright © 2005 Intel Corporation. All rights reserved.

Legge di Moore



*Note: Vertical scale of chart not proportional to actual Transistor count.

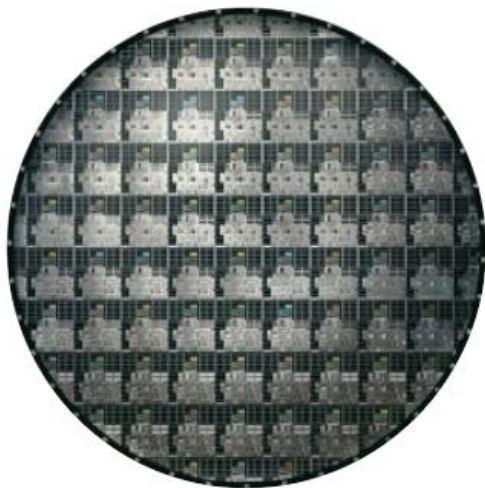


Legge di Moore

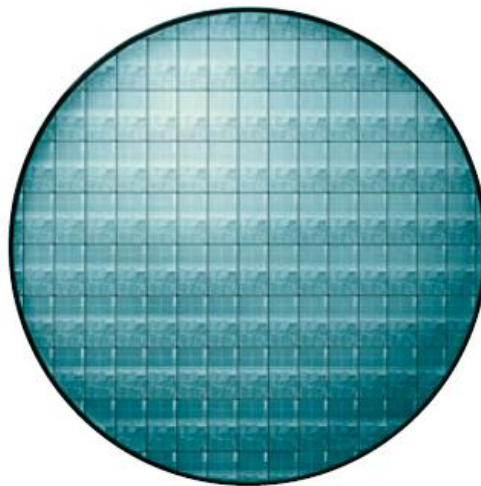
Microprocessor	Year of Introduction	Transistors
4004	1971	2,300
8008	1972	2,500
8080	1974	4,500
8086	1978	29,000
Intel286	1982	134,000
Intel386™ processor	1985	275,000
Intel486™ processor	1989	1,200,000
Intel® Pentium® processor	1993	3,100,000
Intel® Pentium® II processor	1997	7,500,000
Intel® Pentium® III processor	1999	9,500,000
Intel® Pentium® 4 processor	2000	42,000,000
Intel® Itanium® processor	2001	25,000,000
Intel® Itanium® 2 processor	2003	220,000,000
Intel® Itanium® 2 processor (9MB cache)	2004	592,000,000

Legge di Moore

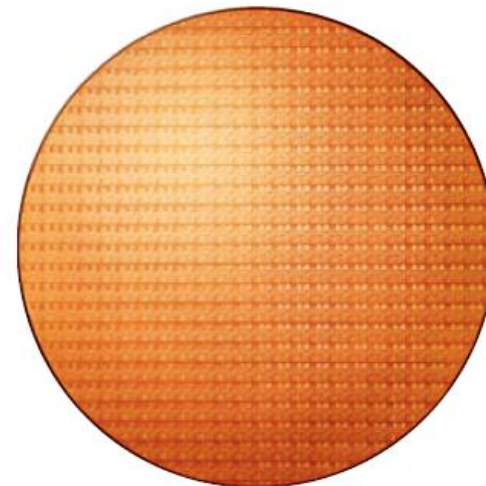
Intel® Wafers



Intel® Itanium® Processor



Intel® Xeon™ Processor



Intel® Pentium® 4 Processor

Copyright © 2005 Intel Corporation.

Bibliografia

- Atkinson K. E., "Elementary Numerical Analysis", John Wiley & Sons, (1993)
- Comincioli V., "Analisi numerica. Metodi Modelli Applicazioni", McGraw-Hill, (1990)
- Kaplan R., "Zero – Storia di una cifra", RCS, Milano, (1999)
- Lotka A. J., "Elements of physical biology", Williams & Wilkins, (1925)
- Moore G. E., "Cramming more components onto integrated circuits", Electronics, Volume 38, Number 8, April 19, (1965)
- Volterra V., *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei. Ser. VI, vol. 2, (1926)
- [ftp://download.intel.com/research/silicon/Gordon Moore ISSCC 021003.pdf](ftp://download.intel.com/research/silicon/Gordon_Moore_ISSCC_021003.pdf)
- <http://www.intel.com/research/silicon/mooreslaw.htm>
- [ftp://download.intel.com/museum/Moores Law/Images Assets/Image Usage Guide Readme.pdf](ftp://download.intel.com/museum/Moores_Law/Images_Assets/Image_Usage_Guide_Readme.pdf)

