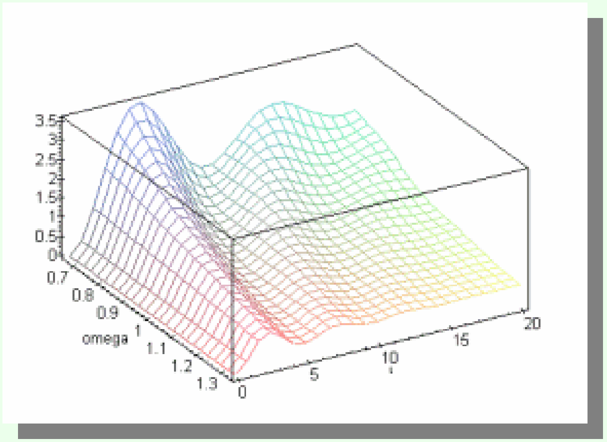
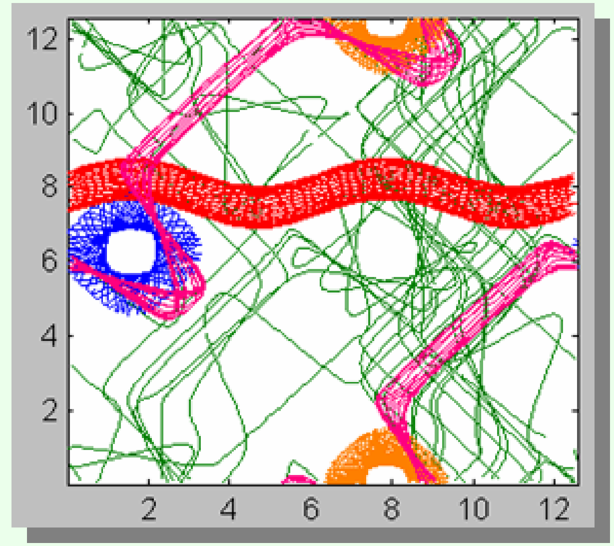
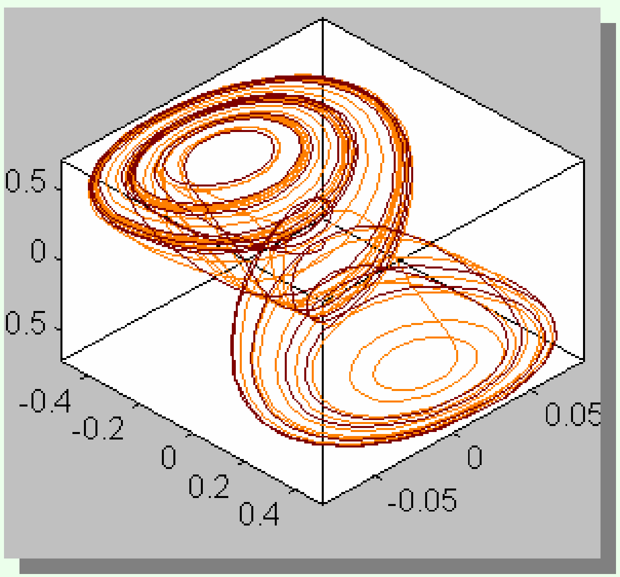
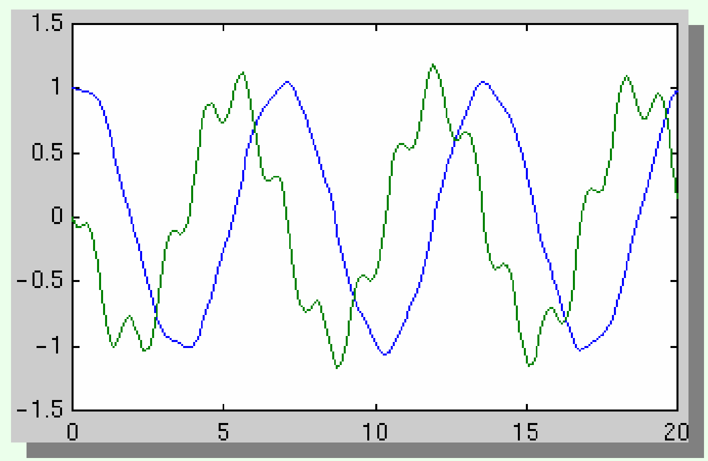
E8

Sistemi differenziali ordinari









Costruzione di un modello

E8.1 Il sistema Predatore-Preda

Si desidera studiare l'evoluzione dinamica di un ecosistema costituito da due specie: preda e predatore (ad esempio i lupi e le lepri). La preda è in grado di sopravvivere procurandosi del cibo ma ogniqualvolta incontra un predatore soccombe. Se i predatori sono troppo voraci le prede diminuiscono mandando in soprannumero i predatori stessi. Quando i predatori sono in soprannumero la fonte di sopravvivenza venendo meno li fa contrarre permettendo una nuova crescita delle prede. Il sistema a seconda delle condizioni iniziali con cui viene modellato l'ecosistema e a seconda della natalità e mortalità delle due specie può mostrare un comportamento assai articolato ed al contempo periodico.

Si desidera costruire un modello matematico dell'ecosistema preda-predatore e a tal fine si introducono le grandezze: $x(t)$ e $y(t)$ che rispettivamente descrivono l'evoluzione temporale della popolazione delle lepri e dei lupi.

Costruzione di un modello

Si procede con delle ipotesi semplificative:

1. Per quanto riguarda la popolazione delle prede, $x(t)$, si introduce il tasso di accrescimento x_a e quello di morte naturale x_m indipendente cioè dalla morte causata dai predatori.

2. Si ipotizza che x_a e x_m siano costanti con $x_a > x_m$.

3. Ciò significa che se la popolazione preda è lasciata da sola cresce con una velocità pari a: $(x_a - x_m) \cdot x$.

4. Si ipotizza che il tasso di mortalità della preda causato dal predatore sia proporzionale al numero di volte che le prede ed i predatori si incontrano, quindi sia legato al prodotto delle popolazioni delle due specie: $x \cdot y$.

5. La popolazione preda è quindi descritta dalla seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \qquad \text{con} \quad \alpha \equiv x_a - x_m > 0 \qquad \beta > 0$$

Costruzione di un modello

6. Per quanto riguarda la popolazione dei predatori, $y(t)$, essa aumenta come diretta conseguenza degli incontri tra le due specie mentre diminuisce per cause naturali legate alla mancanza di prede. Si ha quindi:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y \qquad \text{con} \quad \gamma > 0 \qquad \delta > 0$$

Queste due equazioni differenziali ordinarie alle condizioni iniziali furono proposte nel 1925 dal biologo americano Alfred Lotka e dal matematico italiano Vito Volterra.

Il problema matematico è completato dalle condizioni al contorno:

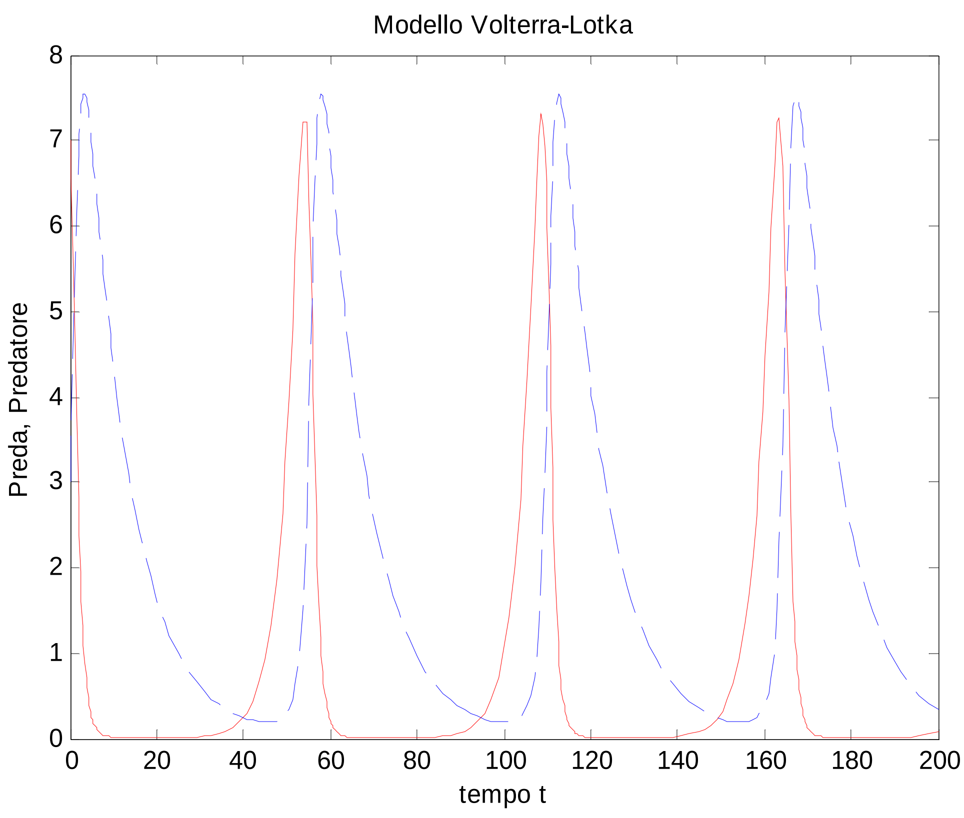
$$x\left(t_0\right) = x_0 \qquad y\left(t_0\right) = y_0$$

Integrazione con Matlab™

```
function  Ese81

   %  Esempio di integrazione di un sistema differenziale
   %  Modello Preda-Predatore di Volterra-Lotka

   %  Inizializzazione dell'ambiente
   clear all
   clc

   global alfa beta gamma delta
   alfa = .3;     beta = .15;
   gamma = .1;    delta = .1;

   estremiIntegrazione = [0 200];
   y0 = [7  3];
   [t,y] = ode45(@FPredaPredatore,estremiIntegrazione,y0);

   plot(t,y(:,1),'r-');   hold on;
   plot(t,y(:,2),'b--');
   title('Modello Volterra-Lotka');
   xlabel('tempo t');   ylabel('Preda, Predatore');

end
```

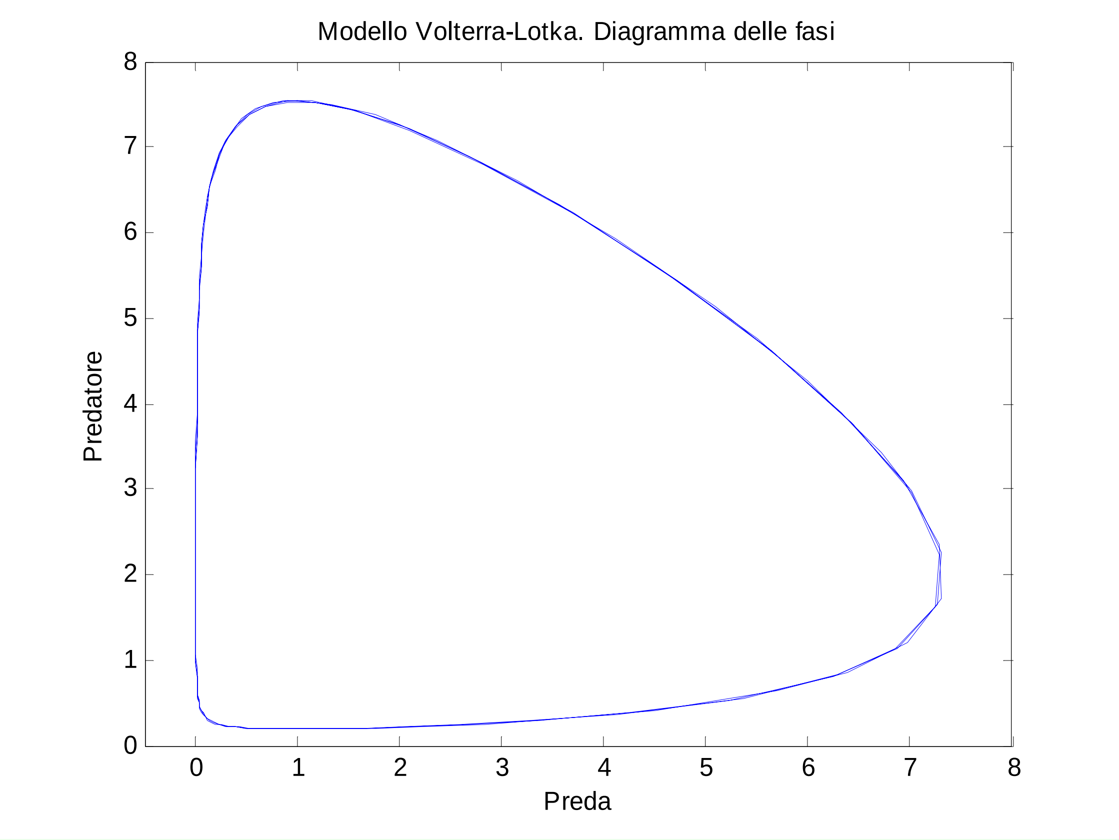
Integrazione con Matlab™

```
function yDot = FPredaPredatore(t,y)

   global alfa beta gamma delta

   yDot(1) = alfa*y(1) -beta*y(1)*y(2);
   yDot(2) = delta*y(1)*y(2) -gamma*y(2);
   yDot = yDot';      %  deve essere un vettore colonna

end
```



Integrazione con Matlab™

```
figure;
plot(y(:,1),y(:,2));
axis([-0.5 8 0 8]);
title('Modello Volterra-Lotka. Diagramma delle fasi');
xlabel('Preda');   ylabel('Predatore');
```



Metodo di Eulero esplicito

E8.2 Integrazione con Eulero esplicito

Si desidera ora integrare una semplicissima equazione differenziale: $y' = -\lambda\, y$

che a seconda del valore di λ ha un andamento decrescente più o meno rapido.

La soluzione analitica è: $y = \exp\left(-\lambda\, t\right)$

Utilizzando il metodo di Eulero esplicito si chiede di confrontare la soluzione numerica ottenuta per vari valori del passo di integrazione, h, fisso al variare del parametro λ, confrontando i risultati ottenuti con l'integratore di Matlab™: **ode45** e con la soluzione analitica.

Utilizzare come dati: $\lambda = 10; \;\; t = 0,\ldots 1; \;\; y(t=0) = y_0 = 1.;$

$$h = 0.001,\ 0.01,\ 0.1\ ,\ 0.2,\ 0.3.$$

Osservare il comportamento dell'integratore e trarre delle conclusioni.

Si rammenta la formula di Eulero esplicito: $y\left(t+h\right) = y\left(t\right) + h\, f\left(t, y\left(t\right)\right)$

Metodo di Eulero esplicito

```
function  Ese82

   %  Esempio di integrazione di un sistema differenziale tramite metodo di
   %  Eulero esplicito. Confronto con un integratore Runge-Kutta a passo
   %  variabile con controllo dell'errore ed anche con la soluzione analitica.

   clear all;       clc;    %  Inizializzazione dell'ambiente

   global lambda
   lambda = 10.;

   tIni = 0.;   tEnd = 1.;
   h = .001;    y0 = 1.;
   tEulero(1) = tIni;       yEulero(1) = y0;

   %    Integrazione con il metodo di Eulero esplicito
   nPassi = ceil((tEnd - tIni) / h);
   for i = 1: nPassi
       yEulero(i + 1) = yEulero(i) + h * FEse82(tEulero(i), yEulero(i));
       tEulero(i + 1) = tEulero(i) + h;
   end

   %    Integrazione con il metodo di Runge-Kutta
   estremiIntegrazione = [tIni tEnd];
   [tRunge,yRunge] = ode45(@FEse82,estremiIntegrazione,y0);

   %    Soluzione analitica
   yAnalitica = exp(-lambda .* tRunge);

   plot(tEulero,yEulero,'r-');      hold on;
   plot(tRunge,yRunge,'b-');        plot(tRunge,yAnalitica,'g-');
   title('Confronto con Eulero esplicito Runge-Kutta e Sol. Analitica');
   xlabel('tempo t');   ylabel('yEulero, yRunge, yAnalitica');

end
```

```
function yDot = FEse82(t,y)

   global lambda

   yDot = -lambda*y;

end
```

Metodo di Eulero esplicito