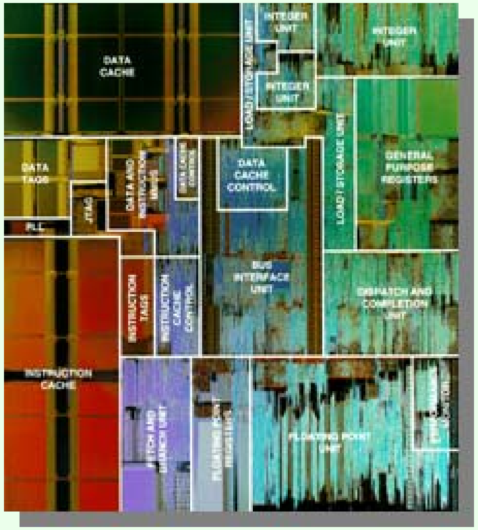
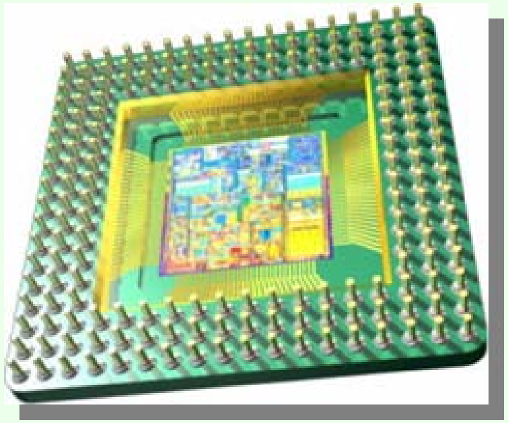
E2

Basi di numeri

Analisi degli errori





Cardinalità dell'insieme dei numeri *floating point*

E2.1

Si desidera determinare la cardinalità dell'insieme dei numeri in floating point:

$$fl(x) = \sigma \cdot \left(1.a_1 a_2 \ldots a_P\right)_2 \cdot 2^e$$

Qualora si lavori in singola precisione (32 bit) o in doppia precisione (64 bit) con un processore in standard IEEE.

Numeri in *floating point*

E2.2

Quanto valgono: 2^{127} 2^{1023} 2^{-126} 2^{-1022} e che numeri sono?

E2.3

Lavorando in singola precisione se **x = 1.e25, y = 1.e18**

dapprima predire e quindi verificare calcolandolo quanto vale **z**:

z = x * y	**z = y²**
z = x/y	**z = 1./(x*y)**
z = y/z	**z = 1. / x / y**
z = x²	**z = y + 1.e10**
	z = x*y / (x*y + 1.)

Macheps

E2.4 Calcolo del Macheps

Il macheps nel linguaggio dell'analisi numerica e in quello programmativo è il più piccolo numero che sommato a 1 produce un nuovo numero maggiore di 1.

Ovvero: 1. + macheps > 1.

In Analisi Classica, relativamente a questo argomento, non possiamo parlare prettamente di numero bensì di quantità tendente a zero: ε. Ovvero secondo le nozioni topologiche dell'analisi classica, preso un intorno ε di 1, piccolo a piacere, in tale intervallo cadono infiniti numeri reali (infiniti irrazionali ed infiniti razionali).

Viceversa, l'Analisi Numerica a calcolatore, mostra come la capacità di risoluzione e descrizione dei numeri da parte di un calcolatore, in virgola mobile, sia assolutamente finita e limitata.

Realizzare un programma in Matlab™ per la determinazione del macheps in singola ed in doppia precisione

Cicli iterativi

E2.5

```
single x
x = 3.
for i = 1 to 1.e7
      x = x + 2.37e-7
next i
print x
```

Quanto vale **x** ?

E se viceversa all'inizio del programma avessimo scritto: **double x** ?

Siete davvero sicuri della risposta che avete dato ragionando ma senza provare ad implementarla in un programma su computer?

Precisione al calcolatore

E2.6

Determinare numericamente il valore della somma di 70 milioni di volte di (1./7.).

Calcolare l'errore assoluto e quello relativo compiuto, tramite confronto con il valore esatto.

E2.7

Determinare il numero di termini necessario, nello sviluppo in serie di log(1+x), per calcolare il valore numerico di log(2) commettendo un errore relativo inferiore a 1.e-2, 1.e-4, 1.e-6 (utilizzare come valore esatto quello calcolato direttamente dal computer tramite l'operazione intrinseca log(2.)). Cosa succede per un errore relativo pari a 1.e-8 o superiore?

$$\log(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

Esiste un metodo *brillante* per calcolare $(-1)^{i+1}$ nell'ambito della formula riportata?

Valutazione di funzioni

E2.8

Diagrammare con Matlab™ gli andamenti delle funzioni:

$$f(x) = (x-1)^3$$

$$f(x) = -1 + 3x - 3x^2 + x^3$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$f(x) = -1 + x\big(3 + x(-3 + x)\big)$$

Ingrandendo i diagrammi nell'intervallo: $0.999998 \leq x \leq 1.000002$

ed utilizzando soltanto singoli punti per il grafico.

- Confrontare e commentare i diagrammi ottenuti.
- Quali "problemi/errori" siete in grado di evidenziare?

N.B.: Matlab lavora in doppia precisione (64 bit).

Alcuni aneddoti su casi reali di errori legati all'arrotondamento

E2.9

Sulla scorta dell'esempio dell'indice borsistico di Vancouver effettuare la somma di 500,000 numeri random compresi tra 900 e 1,100 con una precisione di tre cifre decimali utilizzando il troncamento e l'arrotondamento.

Misurare alla fine la differenza tra valore troncato, valore arrotondato e valore calcolato con la massima precisione del calcolatore (in doppia precisione per Matlab™).

Suggerimento: verificare con l'help di Matlab le azioni delle funzioni intrinseche:

`rand, floor, ceil, fix, round`