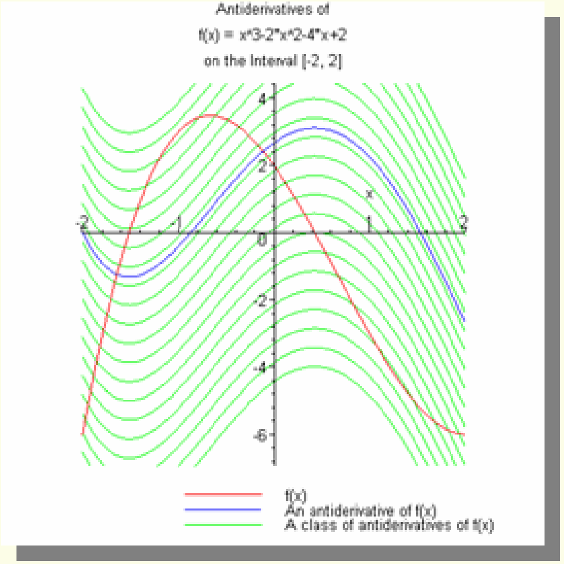
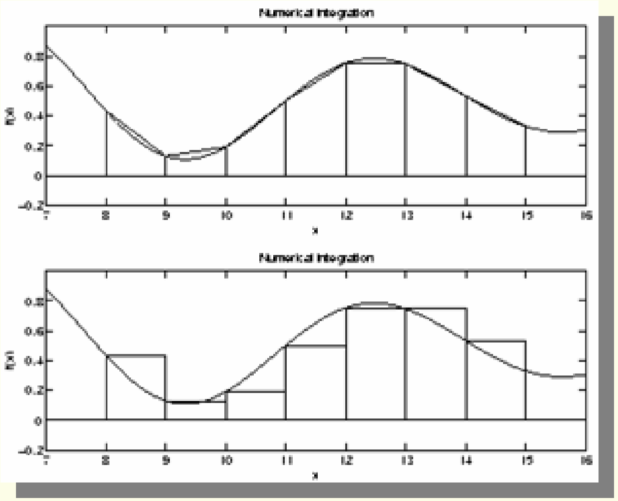
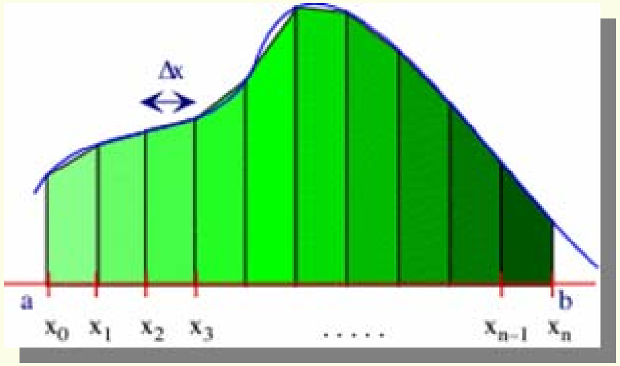
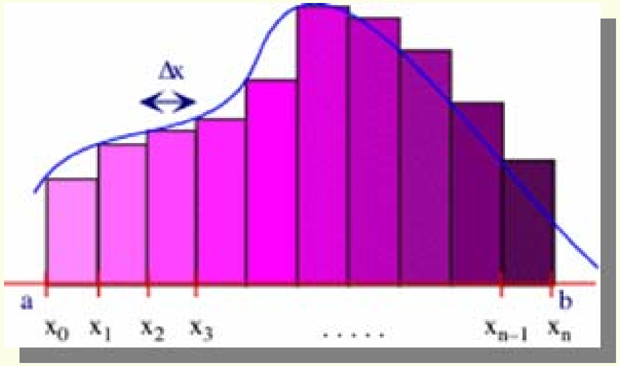
L7

Integrazione









Introduzione

Questo capitolo è volto alla determinazione del valore di un integrale definito, proprio:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Le ipotesi sottese sono che:

la funzione $f(x)$ sia definita, continua e finita in tutto l'intervallo chiuso $a,\ldots b$.

Dall'analisi classica si sa che se $F(x)$ è una **primitiva** di $f(x)$ allora:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nella pratica, comunque, sono pochi gli integrali che possono essere calcolati analiticamente cioè tramite determinazione della funzione primitiva $F(x)$.

Introduzione

In altri casi, anche qualora sia nota la primitiva, $F(x)$, può essere eccessivamente pesante, in termini di tempo di calcolo, determinare il valore dell'integrale tramite l'approccio classico.

A titolo d'esempio, si consideri il seguente integrale:

$$I = \int \frac{1}{1+x^5}\,dx$$

esso è risolvibile analiticamente ma la sua scrittura è molto complicata, infatti vale:

```
I  =  1/5*log(x+1)-1/20*log(2*x^2-x-5^(1/2)*x+2)*5^(1/2)-1/20*log(2*x^2-x
-5^(1/2)*x+2)+1/(10-2*5^(1/2))^(1/2)*atan((4*x-1-5^(1/2))/(10-
2*5^(1/2))^(1/2))-1/5/(10-2*5^(1/2))^(1/2)*atan((4*x-1-5^(1/2))/(10-
2*5^(1/2))^(1/2))*5^(1/2)+1/20*log(2*x^2-x+5^(1/2)*x+2)*5^(1/2)-
1/20*log(2*x^2-x+5^(1/2)*x+2)+1/(10+2*5^(1/2))^(1/2)*atan((4*x-
1+5^(1/2))/(10+2*5^(1/2))^(1/2))+1/5/(10+2*5^(1/2))^(1/2)*atan((4*x-
1+5^(1/2))/(10+2*5^(1/2))^(1/2))*5^(1/2) + cost
```

Introduzione

Come risolvere allora un problema di integrazione numerica di una funzione?

Se non è possibile risolvere direttamente un problema assegnato…
allora si provi a risolvere un problema similare e più semplice.

Ci sono due possibili approcci:

- Utilizzo di polinomi approssimanti basati su un'espansione in serie di Taylor di $f(x)$
- Utilizzo di polinomi interpolanti approssimanti la $f(x)$

Sviluppo in serie di Taylor

L'idea di sostituire la funzione integranda $f(x)$ con un'approssimazione basata sul suo sviluppo in serie di Taylor **non** è in genere premiante.

Tale approccio non è utilizzato a causa di tre difficoltà principali:

- Il calcolo analitico delle derivate della funzione integranda;
- Il numero di termini necessari per ottenere una precisione sufficiente nel calcolo dell'integrale;
- La determinazione del numero di termini necessari per ottenere la precisione desiderata (maggiorazione dell'errore).

Polinomi interpolanti

L’idea è quella di sostituire la funzione integranda, $f(x)$, con una di più facile integrazione, tipicamente un polinomio: $\tilde{f}(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \tilde{f}(x)dx$$

A causa della criticità dei polinomi di grado elevato (che si rammenta passano per i punti di supporto utilizzati per l’interpolazione ma hanno andamento assai oscillante e *nervoso*) in genere si preferisce mantenere sufficientemente basso il grado del polinomio interpolante utilizzato e suddividere l’intervallo complessivo di integrazione $a,\ldots b$ in sottointervalli all’interno dei quali lavorare con singoli polinomi.

Spesso i sottointervalli utilizzati sono equispaziati.

Interpolazione lineare

Dato l'intervallo di integrazione $a,\ldots b$ il polinomio di primo grado $P_1(x)$ che interpola la funzione integranda, $f(x)$, passando per tali estremi è:

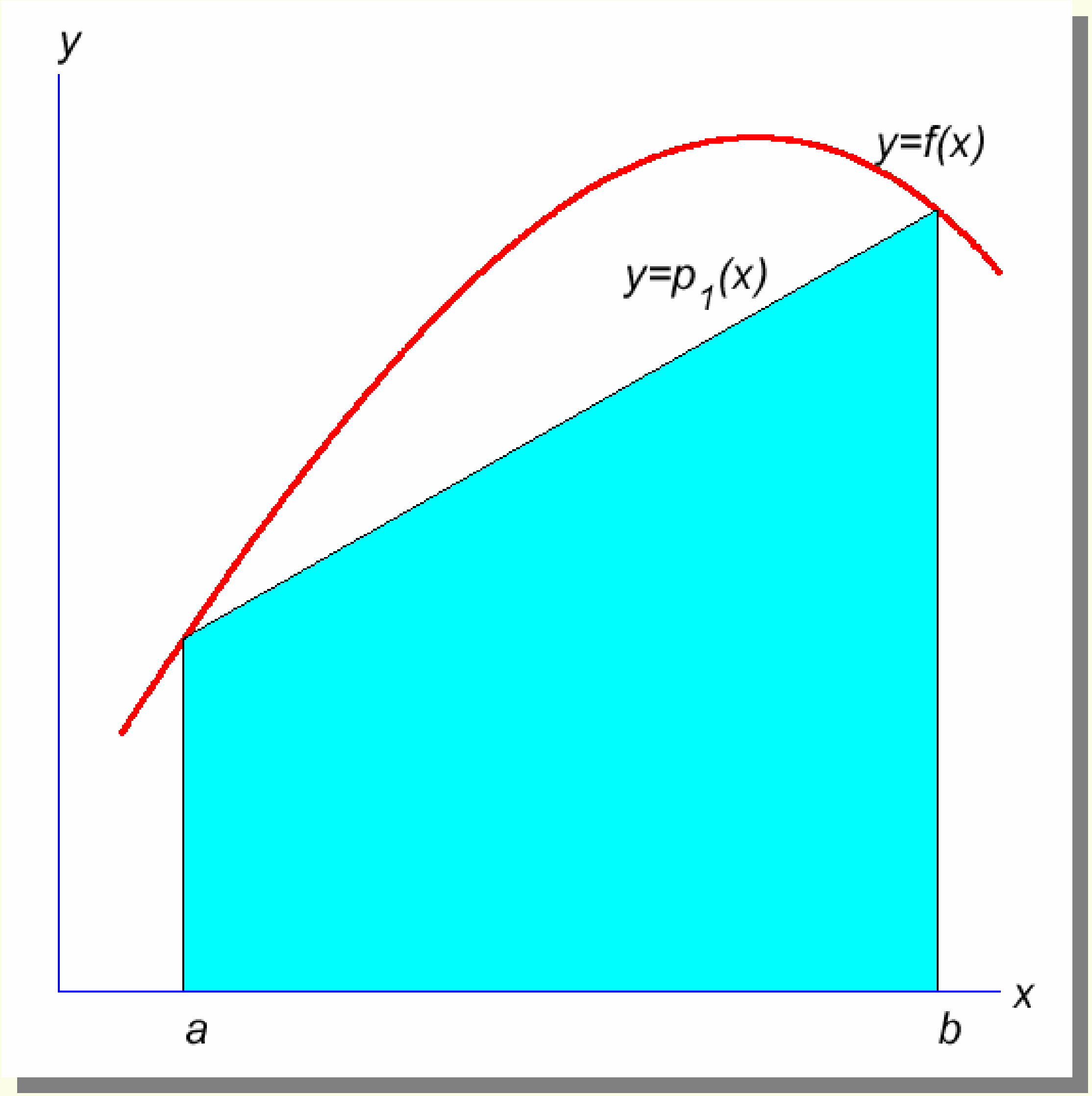
$$P_1(x) = \frac{(b-x)f(a)+(x-a)f(b)}{b-a}$$

Conseguentemente, l'integrale viene approssimato dalla seguente formula:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$

Tale formula che approssima numericamente l'integrale, I, è detta **formula del trapezio** o di **Bézout**.

Formula del trapezio



Etienne Bézout
(1730-1783)

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$

Formula del trapezio

Come è possibile accrescere la precisione dell'integrale?

- una alternativa è quella di **accrescere il grado del polinomio** interpolante (questa pratica non sempre è premiante);

- una seconda alternativa è quella di **aumentare il numero di sottointervalli** rispetto cui applicare nuovamente la formula del trapezio.

Ad esempio, suddividendo l'intervallo di integrazione $a,\ldots b$ in due sottointervalli equispaziati si ottiene:

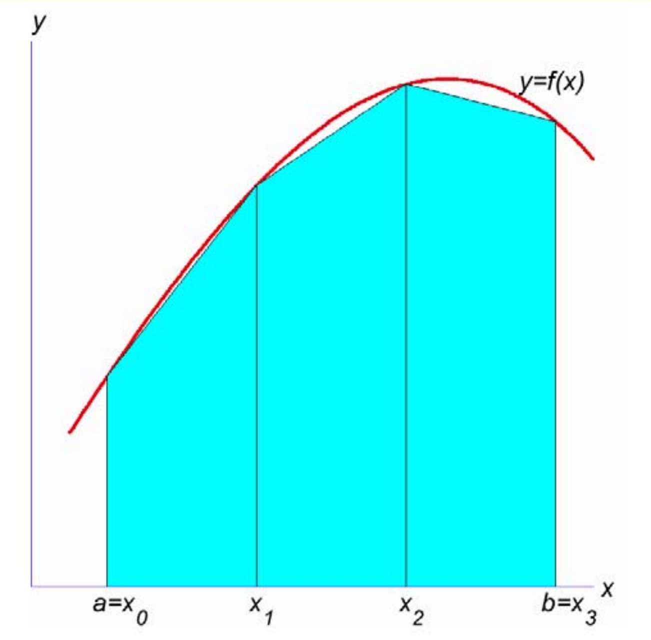
$$I = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \approx \frac{c-a}{2}\left[f(a)+f(c)\right] + \frac{b-c}{2}\left[f(c)+f(b)\right] =$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a)+2f(c)+f(b)\right] \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

Formula del trapezio

Iterando il procedimento ed estendendolo a tre intervalli:

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(b) \right] \qquad h = \frac{b-a}{3}$$



Ad esempio calcolando: $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$

# intervalli	Integrale calcolato	Errore assoluto
1	0.785398	0.214602
2	0.948059	0.051941
3	0.976294	0.023706
4	0.987116	0.012884
...	...	...

Formula del trapezio

Generalizzando il procedimento ed estendendolo ad un numero $n \geq 1$ di intervalli equispaziati, si ottiene la formula generale:

$$I \approx h\left[0.5 f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + 0.5 f(x_n)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + ih \qquad i = 0,\ldots,n \qquad n \geq 1$$

A titolo di esempio, integrando $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$ con la formula del trapezio si ottiene:

n	Integ calc	Errore	Rapporto
1	.785398163	2.15E−1	
2	.948059449	5.19E−2	4.13
4	.987115801	1.29E−2	4.03
8	.996785172	3.21E−3	4.01
16	.999196680	8.03E−4	4.00
32	.999799194	2.01E−4	4.00
64	.999949800	5.02E−5	4.00
128	.999987450	1.26E−5	4.00
256	.999996863	3.14E−6	4.00

Si noti come gli errori commessi decrescano di un fattore 4 raddoppiando il numero degli intervalli. Nel prosieguo verrà data spiegazione di tale peculiarità.

Interpolazione quadratica

Se si utilizza un polinomio interpolante di secondo grado nell'intervallo $a,\ldots b$ occorre basarsi su tre punti di supporto. Se si sceglie come terzo punto di supporto quello mediano $c=\frac{a+b}{2}$, sfruttando il metodo di Lagrange, il polinomio ha equazione:

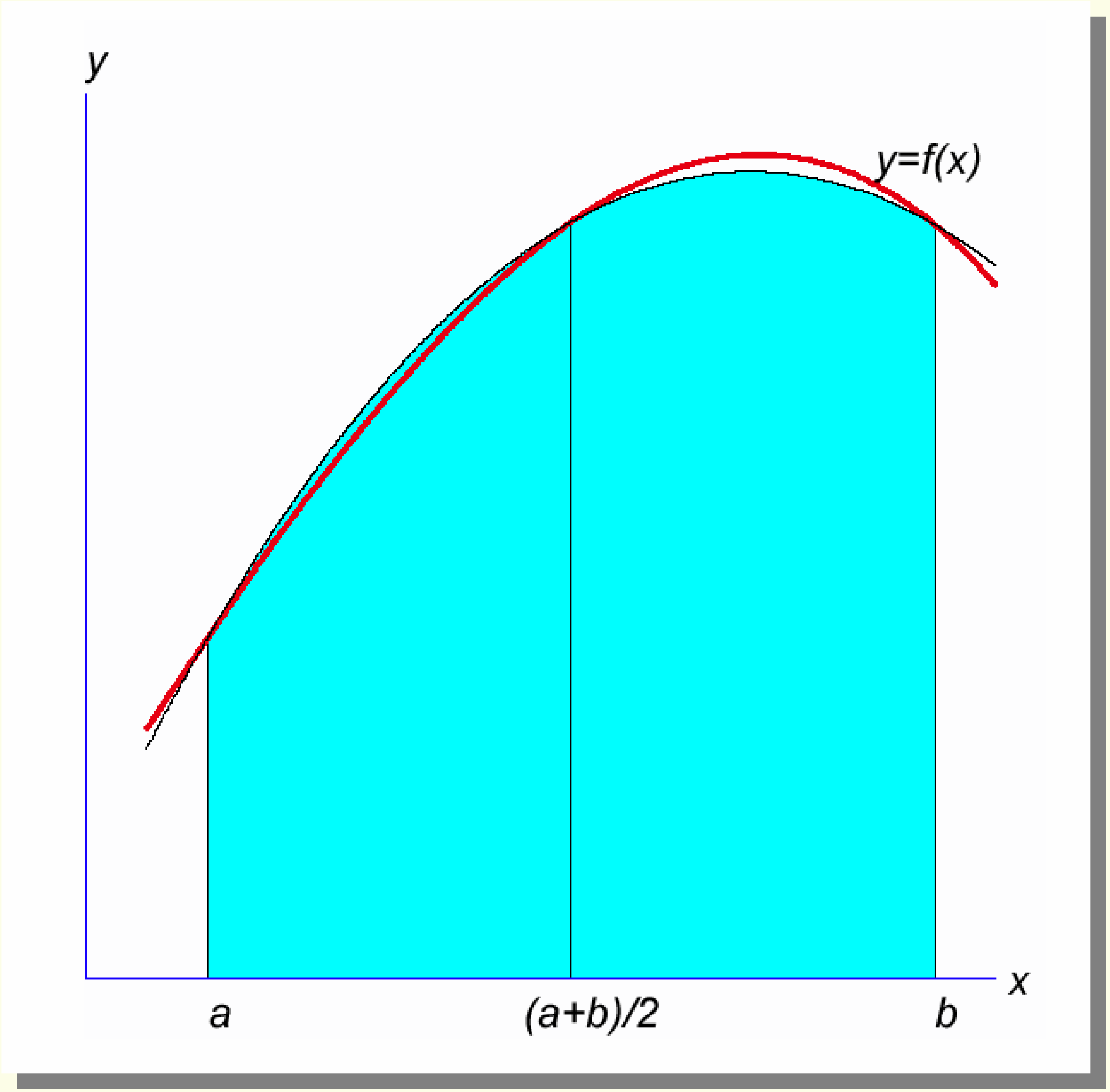
$$P_2(x)=\frac{(x-c)(x-b)}{2h^2}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{-h^2}f(c)+\frac{(x-a)(x-c)}{2h^2}f(b)$$

Quindi l'integrale è approssimabile come:

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b P_2(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]\qquad h=\frac{b-a}{2}$$

Tale formula che approssima numericamente l'integrale, I, è detta **formula di Simpson** (nota anche come formula di Cavalieri-Simpson).

Formula di Simpson



Thomas Simpson
(1710-1761)

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(c) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Formula di Simpson

Generalizzando il procedimento ed estendendolo ad un numero **pari** n di intervalli equispaziati, si ottiene la formula generale:

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + ih \qquad i = 0, \ldots, n \qquad n \in \mathbb{N},\ \text{pari}$$

A titolo di esempio, integrando $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$ con la formula di Simpson si ottiene:

n	Integ calc	Errore	Rapporto
2	1.00227987749221	−2.28E−3	
4	1.00013458497419	−1.35E−4	16.94
8	1.00000829552397	−8.30E−6	16.22
16	1.00000051668471	−5.17E−7	16.06
32	1.00000003226500	−3.23E−8	16.01
64	1.00000000201613	−2.02E−9	16.00
128	1.00000000012600	−1.26E−10	16.00
256	1.00000000000788	−7.88E−12	16.00
512	1.00000000000049	−4.92E−13	15.99

Si noti come gli errori commessi decrescano di un fattore 16 raddoppiando il numero degli intervalli. Nel prosieguo verrà data spiegazione di tale peculiarità.

Trapezio vs Simpson

Confronto tra efficienza della formula del trapezio e formula di Simpson per tre integrali differenti. Dati tratti da:

Atkinson K. E., “Elementary Numerical Analysis”, John Wiley & Sons, (1993)

$$I^{(1)} = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \doteq 0.746824132812427$$

$$I^{(2)} = \int_0^4 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(4) \doteq 1.32581766366803$$

$$I^{(3)} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \doteq 3.62759872846844$$

Formula del trapezio

n	$I^{(1)}$		$I^{(2)}$		$I^{(3)}$	
	Error	*Ratio*	*Error*	*Ratio*	*Error*	*Ratio*
2	1.55E − 2		−1.33E − 1		−5.61E − 1	
4	3.84E − 3	4.02	−3.59E − 3	37.0	−3.76E − 2	14.9
8	9.59E − 4	4.01	5.64E − 4	−6.37	−1.93E − 4	195.0
16	2.40E − 4	4.00	1.44E − 4	3.92	−5.19E − 9	37600.0
32	5.99E − 5	4.00	3.60E − 5	4.00	*	
64	1.50E − 5	4.00	9.01E − 6	4.00	*	
128	3.74E − 6	4.00	2.25E − 6	4.00	*	

Formula di Simpson

n	$I^{(1)}$		$I^{(2)}$		$I^{(3)}$	
	Error	*Ratio*	*Error*	*Ratio*	*Error*	*Ratio*
2	−3.56E − 4		8.66E − 2		−1.26	
4	−3.12E − 5	11.4	3.95E − 2	2.2	1.37E − 1	−9.2
8	−1.99E − 6	15.7	1.95E − 3	20.3	1.23E − 2	11.2
16	−1.25E − 7	15.9	4.02E − 6	485.0	6.43E − 5	191.0
32	−7.79E − 9	16.0	2.33E − 8	172.0	1.71E − 9	37600.0
64	−4.87E − 10	16.0	1.46E − 9	16.0	*	
128	−3.04E − 11	16.0	9.15E − 11	16.0	*	

Determinazione errore per formula trapezi

Definendo: $T_n(f) = \int_a^b P_1(x)dx$ l'integrale numerico calcolato con la **formula del trapezio**, utilizzando n sottointervalli, è possibile dimostrare che l'errore commesso vale:

$$E_n^T(f) \equiv \int_a^b f(x)dx - T_n(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c_n) \qquad c_n \in [a,b]$$

Tale formula asserisce che l'errore decresce in maniera proporzionale ad h^2 che è l'ampiezza del singolo sottointervallo.

N.B.: la formula dell'errore, sopra riportata, è valida asintoticamente se la funzione integranda, $f(x)$, è differenziabile almeno due volte nell'intervallo $a,\dots b$.

N.B.: se la funzione è differenziabile almeno due volte, allora raddoppiando il numero di sottointervalli, la loro ampiezza si dimezza e quindi l'errore diminuisce di un fattore 4.

Determinazione errore per formula trapezi

Esempio: utilizzando la formula del trapezio, si determini il numero minimo di intervalli, n, in grado di ridurre l'errore commesso al di sotto di **5.E-6** per l'integrale: $I = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$. Si chiede cioè che: $\left| E_n^T(f) \right| < 5.\mathrm{E}-6$

Svolgimento: $f(x)$ è infinitamente differenziabile.

Si calcola quindi la derivata seconda: $f''(x) = \frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$

Rammentando che: $E_n^T(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c_n)$ dato che non si hanno informazioni sul valore di c_n si maggiora la derivata seconda all'interno dell'intervallo di integrazione $[0,2]$: $\max_{0 \le x \le 2} \left| f''(x) \right| = \left| f''(0) \right| = 2$

Quindi: $\left| E_n^T(f) \right| = \left| -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c_n) \right| \le \frac{h^2(2-0)}{12} 2 = \frac{h^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{h^2}{3} < 5.\mathrm{E}-6$

Si ha: $h < 0.003873 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{(2-0)}{h} = 516.4$ Quindi: $\boxed{n \ge 517}$

Determinazione errore per formula Simpson

Definendo: $S_n(f)=\int_a^b P_2(x)dx$ l'integrale numerico calcolato con la **formula di Simpson**, utilizzando n sottointervalli, è possibile dimostrare che l'errore commesso vale:

$$E_n^S(f)\equiv\int_a^b f(x)dx-S_n(f)=-\frac{h^4\left(b-a\right)}{180}f^{(4)}(c_n)\qquad c_n\in\left[a,b\right]$$

Tale formula asserisce che l'errore decresce in maniera proporzionale ad h^4 che è l'ampiezza del singolo sottointervallo.

N.B.: la formula dell'errore, sopra riportata, è valida asintoticamente se la funzione integranda, $f(x)$, è differenziabile almeno quattro volte nell'intervallo $a,\ldots b$.

N.B.: se la funzione è differenziabile almeno quattro volte allora raddoppiando il numero di sottointervalli, la loro ampiezza si dimezza e quindi l'errore diminuisce di un fattore 16.

Determinazione errore per formula Simpson

Esempio: utilizzando la formula di Simpson, si determini il numero minimo di intervalli, n, in grado di ridurre l'errore commesso al di sotto di **5.E-6** per l'integrale: $I = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$. Si chiede cioè che: $\left| E_n^S(f) \right| < 5.\mathrm{E}-6$

Svolgimento: $f(x)$ è infinitamente differenziabile.

Si calcola quindi la derivata quarta: $f^{(4)}(x) = 24 \frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{\left(1+x^2\right)^5}$

Rammentando che: $E_n^S(f) = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n)$ dato che non si hanno informazioni sul valore di c_n si maggiora la derivata quarta all'interno dell'intervallo di integrazione $[0,2]$: $\max\limits_{0 \le x \le 2} \left| f^{(4)}(x) \right| = \left| f^{(4)}(0) \right| = 24$

Quindi: $\left| E_n^S(f) \right| = \left| -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n) \right| \le \frac{h^4(2-0)}{180} 24 = \frac{4h^4}{15} \quad \Rightarrow \quad \frac{4h^4}{15} < 5.\mathrm{E}-6$

Si ha: $h < 0.0658 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{(2-0)}{h} = 30.39$ Quindi: $\boxed{n \ge 32}$

Un controesempio...

Esempio: come controesempio si utilizza l'integrale: $I = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$

La funzione integranda **non** è differenziabile nell'intervallo di integrazione: $[0,1]$.

Ecco di seguito riportati gli andamenti degli errori per la formula del trapezio e di Simpson.

n	E_n^T	$Ratio$	E_n^S	$Ratio$
2	$6.311E-2$		$2.860E-2$	
4	$2.338E-2$	2.70	$1.012E-2$	2.82
8	$8.536E-3$	2.74	$3.587E-3$	2.83
16	$3.085E-3$	2.77	$1.268E-3$	2.83
32	$1.108E-3$	2.78	$4.485E-4$	2.83
64	$3.959E-4$	2.80	$1.586E-4$	2.83
128	$1.410E-4$	2.81	$5.606E-5$	2.83

Tratto da: Atkinson K. E., "Elementary Numerical Analysis", John Wiley & Sons, (1993)

Formula di estrapolazione di Aitken

Si desidera sottolineare il fatto che sia la formula del trapezio che quella di Simpson, qualora si aumenti il numero di sottointervalli in cui calcolare l'integrale, per accrescere la precisione della stima, **possono sfruttare le valutazioni di funzione integranda già effettuate** (ciò avviene se l'algoritmo di integrazione ha preventivamente memorizzato le valutazioni della $f(x)$ in un opportuno vettore).

Se sono già state effettuate le stime dell'integrale per un numero di sottointervalli pari a: n, $2n$, $4n$, allora è possibile estrapolare il valore dell'integrale nel seguente modo:

$$I \approx I_{4n} - \frac{\left(I_{4n} - I_{2n}\right)^2}{\left(I_{4n} - I_{2n}\right) - \left(I_{2n} - I_n\right)}$$

Tale formula è detta di **estrapolazione di Aitken**.

L'integrazione da un'ottica diversa

Gli algoritmi di integrazione si basano principalmente sulla seguente approssimazione:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \qquad n \geq 1$$

I vari algoritmi si differenziano per la scelta dei pesi w_i e per il posizionamento dei punti x_i rispetto cui valutare la funzione integranda.

Non necessariamente i punti x_i sono equispaziati.

Definizione: se i punti x_1 e x_n corrispondono agli estremi dell'intervallo di integrazione si parla di **formule chiuse** altrimenti di **formule aperte**.

Esempio:

La formula del trapezio: $I \approx \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$ è una **formula chiusa**.

La formula del punto di mezzo: $I \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ è una **formula aperta**.

L'integrazione da un'ottica diversa

Vediamo ora come determinare i pesi w_i. Se sono noti n punti di supporto distinti $(x_i,\ f(x_i))$, si può determinare in modo univoco il polinomio di grado $n-1$ che li interpola esattamente.

Utilizzando la **formula di Lagrange** (confronta L4-17) è possibile calcolare agevolmente i pesi w_i della: $I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$

Infatti: $P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i(x)$

con $L_i(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$

N.B.: i polinomi di Lagrange **non** dipendono dalla specifica funzione integranda scelta. Conseguentemente, i pesi w_i sono facilmente calcolabili una volta fissati i punti di supporto x_i.

N.B.: a seconda della scelta dei punti di supporto x_i , non necessariamente equispaziati, i pesi w_i cambiano concordemente.

L'integrazione da un'ottica diversa

I pesi w_i sono facilmente calcolabili una volta fissati i punti di supporto x_i. Infatti:

$$w_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

Esempio:

Scegliendo $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$, $x_3 = b$ i tre pesi valgono:

$$w_1 = \frac{b-a}{6}$$

$$w_2 = \frac{2(b-a)}{3}$$

$$w_3 = \frac{b-a}{6}$$

e ponendo $h = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = (b-a)/2$ si ottiene: $I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right]$

che è la **formula di Simpson**.

Formule di Newton-Cotes

Se i punti di supporto, x_i, sono equispaziati si hanno le formule di Newton-Cotes che possono essere chiuse, aperte o semiaperte.

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

Formula del trapezio

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Formula di Simpson

$$I = \frac{3h}{8}\left[f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

Formula 3/8

$$I = \frac{2h}{45}\left[7f(x_1) + 32f(x_2) + 12f(x_3) + 32f(x_4) + 7f(x_5)\right] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$$

Formula di Boole

Formule di Gauss

Le formule di Gauss sfruttano le **posizioni** dei punti di supporto, x_i, come gradi di libertà per aumentare la precisione a parità di numero di punti, n, in cui calcolare la funzione integranda.

Fissando i punti di supporto ed utilizzando n punti, la formula di integrazione produce un risultato esatto per un polinomio di grado $n-1$.

Se si utilizzano come gradi di libertà **anche** la posizione degli n punti di supporto allora si può ottenere una formula esatta per polinomi di grado $2n-1$.

Problema: si desidera trovare gli n pesi w_i e gli n nodi x_i in modo tale che l'integrale sia esatto per polinomi di grado $2n-1$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

N.B.: gli estremi di integrazione sono -1, 1. Le incognite da trovare sono $2n$.

Formule di Gauss

Si chiede quindi che la formula di quadratura sia **esatta** per i polinomi:

$$f(x) = x^i \qquad i = 0,...,2n-1$$

Così facendo si ottiene il sistema di equazioni:

$$w_1 x_1^i + w_2 x_2^i + \ldots + w_n x_n^i = \int_{-1}^{1} x^i dx \qquad i = 0,\ldots,2n-1$$

Si noti che:

$$\int_{-1}^{1} x^i dx = \begin{cases} \dfrac{2}{i+1} & i = 0,2,\ldots,2n-2 \\ 0 & i = 1,3,\ldots,2n-1 \end{cases}$$

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

È possibile dimostrare che il **sistema** di $2n$ **equazioni non lineari** nelle incognite w_i e x_i è risolvibile e la soluzione è unica.

In realtà i pesi w_i ed i nodi x_i non vengono determinati risolvendo il sistema in questione, bensì tramite metodi numerici specifici.

Formule di Gauss

I pesi w_i ed i nodi x_i rispettano delle proprietà di **simmetria**, infatti:

$$x_i = -x_{n-i} \qquad w_i = w_{n-i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Inoltre è possibile dimostrare che tutti i pesi w_i sono **positivi**. Ciò è molto importante in quanto riduce i problemi di somma di quantità oscillanti che potrebbero elidersi a livello di precisione numerica.

Il fatto che le formule di Gauss siano costruite appositamente per integrali aventi come estremi di integrazione -1, 1 **non** è assolutamente limitante. Infatti vale la seguente relazione che permette di ricondurre qualsiasi integrale definito all'intervallo summenzionato:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a+t(b-a)}{2}\right)dt$$

Avendo effettuato la sostituzione di variabile: $x = \dfrac{b+a+t(b-a)}{2} \qquad -1 \le t \le 1$

Bibliografia

- Atkinson K. E., "Elementary Numerical Analysis", John Wiley & Sons, (1993)
- Buzzi Ferraris G., "Metodi numerici e Software in C++", Addison Wesley, (1998)

- http://www.chem.polimi.it/homes/gbuzzi/index.htm
- http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/
- http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bezout.html
- http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cavalieri.html
- http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html
- http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Simpson.html